الحلول العددية
للمعادلات التفاضلية العادية



الدكتور أبوبكر أحمد السيد

قسم الرياضيات وعلم الحاسوب

جامعة الكويت

دار القلم
الكويت

Numerical Solutions of Ordinary Differential Equations



Dr. Abu-Bakr Ahmed El-Sayed

Department of Mathematics and Computer Science
University of Kuwait

الحلول العددية
للمعادلات التفاضلية العادية

د. أبو بكر أحمد السيد

قسم الرياضيات وعلم الحاسوب
جامعة الكويت

Numerical Solutions
Of
Ordinary Differential Equations

Dr. Abu-Bakr Ahmed El-Sayed

Department of Mathematics and Computer Science

University of Kuwait

Numerical Solutions
Of
Ordinary Differential Equations

Dr. Abu-Bakr Ahmed El-Sayed

Department of Mathematics and Computer Science

University of Kuwait

الحلول العددية

للمعادلات التفاضلية العادية

الحلول العددية
للمعادلات التفاضلية العادية

الدكتور أبو بكر أحمد السيد

قسم الرياضيات وعلم الحاسوب

جامعة الكويت

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿ صِبغَةَ اللهِ ومن أحسنُ من اللهِ صبغةً ونحن له عبدون ﴾ (*)

(سورة البقرة ١٣٨)

(*) سُمي الدين صبغة بطريق الاستعارة حيث يظهر أثره على المؤمن كما يظهر أثر الصبغ في الثوب.

حقوق الطبع محفوظة

الطبعة الأولى

١٤٢١هـ - ٢٠٠٠م

دار القلم للنشر والتوزيع

شارع السور - عمارة السور - الطابق الأول

هاتف : ٢٤٥٧٤٠٧ - ٢٤٥٨٤٧٨ - برقيا توزيعكو

ص . ب ٢٠١٤٦ الصفاة 13062 الكويت

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمـــة

الحمد لله رب العالمين ، والصلاة والسلام على خاتم المرسلين نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين ... وبعد

اللسان العربي[1]

ما أحوجنا اليوم إيقاظ المشاعر ، وتحريك الهمم والطاقات ، ووضع إشارات على الطريق نحو توبة لُغوية نصوح تعود بلغة القرآن – لغة الإسلام وحضارته وأمته – إلى مكانتها ورسالتها الطبيعية: لغة للعلم والثقافة والاتصال بين أبناء الأمة ، وهو ما تنعم به معظم لغات الأمم الأخرى ، وتحرم منه العربية التي هي أعظم منها جميعا غِنى في الطاقات ، وكفاءة في الأداء ، وشرفا وسموا في الرسالة.

لقد كانت العربية قرونا هي اللغة الرسمية والأداة الأولى للعلم والثقافة والتواصل بين المسلمين من المحيط الأطلسي غربا إلى جنوب شرق آسيا ، بل تبنتها فئات من غير المسلمين مفتاحا للثقافة والحضارة الإسلامية المتقدمة.

مأساة حضارية

[1] عبد الوارث مبروك سعيد: اللسان العربي .. الهوية . الأزمة . المخرج . دار النشر للجامعات المصرية – مكتبة الوفاء

إنها فعلا لمأساة أن تزدري أمة لغتها وتعمل للقضاء عليها بيدها ، متعاونة في ذلك مع أعدائها الأعداء الذين وصموا اللسان العربي ظلما بالصعوبة والجمود وعدم الصلاحية لاستيعاب علوم العصر.

لسان فريد

إن العزيز من أعزه الله ، والمكرَّم من كرمه الله ! هذه حقيقة لا يماري فيها أحد. ومن بين لغات الأرض التي تعد بالآلاف اصطفى الله العليم الحكيم اللسان العربي ليكون وعاء يحمل وحيه تعالى ورسالته الأخيرة الجامعة إلى الناس أجمعين فأصبحت اللغة العربية بفضله تعالى محفوظة وأهلا لأن تكون لغة عالمية لا ترتبط بحدود المكان أو الزمان ، وقد صارت كذلك بالفعل قرونا ، وسوف تعون إلى وضعها العالمي إن شاء الله بعد أن تتعافى أمة الإسلام من أمراضها.

الأزمة

لقد تعرضت العربية لتحديات كثيرة وكبيرة طوال تاريخا ، ولكنها خرجت منها منتصرة قوية .. وأزمتها الحاضرة أشد من سابقاتها وأخطر ، وليس كيد الأعداء الكُثر لها بأخطر من تفريط الأمة في لغتها واستخدامها أمام مخططات عدوها.

الحرف العربي .. الفاتح المطارَد

ومع الفتوح وانتشار الإسلام خارج شبه الجزيرة ، انفتحت ميادين جديدة أما الخط العربي إذ تعلمه المسلمون ليتمكنوا من قراءة كتاب الله وسنة رسوله ، كما تعلم غير المسلمين لأن العربية أصبحت لغة الدواوين ولغة العلم والتعلم.

التغريب اللغوي

واليوم شاع مصطلح التغريب على الألسنة والأقلام التي عنيت بالذود عن مقومات الأمة الإسلامية وهويتها المتميزة ويعنون به العمليات التي تخطط لها الحكومات الغربية وأتباعها في بلادنا وتهدف إلى صبغ المجتمعات الإسلامية في شتى المجالات بصبغة غربية تفقدها تميزها وتجرها إلى حالة من الرضى بالتبعية للتغريب ، وهذا أخطر ما يمكن أن تصاب به أمة في صميم كيانها.

والعربية – التي هي لسان الأمة ومجلى حضارتها وتميز شخصيتها – من أهم المجالات التي استهدفها هذا التغريب ، لأنها – خلافا لأي لغة أخرى – مرتبط بأقدس وأجل مصادر بناء الأمة وحفظ مقوماتها: وهو القرآن الكريم والسنة النبوية وتراث الإسلام.

لقد حاولوا قتلها فادَّعوا عدم صلاحيتها للحياة الحديثة ، وأن مكانها الملائم متاحف الأثريات ، وأن تحل محلها لغة أجنبية ، ولما لم تلق دعوتهم قبولا حسنوا استبدال اللهجات العامة بها ، ولما خابت دعوتهم نادوا بصعوبتها وتباروا في وصف وسائل التيسير التي ذهب بعضها إلى حد الهدم لبعض أنظمتها ، وكان من تلك الدعوات " الاصلاحية " !! أن تكتب العربية بالحروف اللاتينية !! وهذه المخططات كلها قد باءت في البلاد العربية بالفشل ، وإن تركت جراحا هنا وهناك ، وأهدرت من طاقات الأمة الكثير.

النفخ في الرماد .. إلى متى؟

منذ ما يزيد على نصف قرط و" مجامع اللغة العربية " في دمشق (١٩١٨) والقاهرة (١٩٣٢) وبغداد (١٩٤٧) تبذل جهودا طيبة عالية وتنجز – على ضآلة ما يتاح لها من إمكانات – مساهمات قيمة لخدمة العربية

وصيانتها وإغنائها لتواكب تطورات العصر. وكم بُحَّت أصوات "المجمعيين" في توصياتهم الثمينة التي يصدرونها بعد مؤتمراتهم السنوية ، وفي مختلف المناسبات ليحثوا أولي الأمر ومن بيدهم قرارات التنفيذ على تدارك وضع اللغة العربية المتدهور في كل مجال ، بوضع تلك التوصيات والقرارات موضع التنفيذ ، لكن تلك النداءات المخلصة من صفوة علما العربية وخبرائها لم تلق من أولئك المسئولين – للأسف الشديد – إلا آذانا صماء وإهمالا شديدا ، وعلى سبيل المثال فقد ورد في توصيات مؤتمر مجمع اللغة العربية في القاهرة في دورته التاسعة والخمسين(*)[1] ثلاث عشر توصية عظيمة الأهمية والحاجة إليها ماسة وضرورية ، ولكن هذه التوصيات القيمة ستبقى حبرا على ورق كما حدث لمثيلاتها عبر سنوات عمر هذا المجمع والمجاميع الأخرى ، وكما يحدث دائما لقرارات وتوصيات العشرات من مؤتمراتنا ولجاننا التي لا تعد ولا تحصى.

يطالب المجمع في توصياته بأمور لا يتهاون في العمل بها إلا خائن لله ورسوله وللمؤمنين ، ولأمته ووطنه ولغته . من بينها:

١- تعريب التعليم الجامعي والعالي
٢- وضع خطة قومية لتعريب العلوم
٣- إعداد معاجم في علوم العصر الحديث
٤- استكمال تعريب جميع الإدارات والمؤسسات
٥- ترك العمل على إحياء اللهجات المحلية حفاظا الفصحى

ما الذي يمنع حكوماتنا أن تمنح قرارات المجامع اللغوية وتوصياتها صفة الإلزام القانوني مع الجهات المعنية ، بحيث يؤاخذ قانونيا كل من يخالفها ؟ ما الذي يمنعنا أن نكون كباقي أمم الأرض التي تحترم هويتها ولغاتها ؟.

---

[1] ١٢-١٩٩٣/٤/٢٦

المخرج

إن المخرج من هذه الأزمة لابد أن يبدأ من داخلنا .. أفرادا ومؤسسات وإدارات وحكومات .. " إن الله لا يغير ما بقوم حتى يغيروا ما بأنفسهم [1] ، وقاعدة الانطلاق نحو العلاج الناجح هي الثقة المطلقة في وعد الله تعالى بحفظ كتابه ولغته ، ثم استشعار عظم المسئولية الملقاة على عاتقنا – نحن العرب – تجاه حفظ هذه اللغة والذود عنها ، وإحلالها المحل الصحيح في حياتنا وإيقاف تيار التغريب الذي يأخذنا بعيدا عن طريق النجاة ، ثم نستأنف تعريب الشعوب المسلمة كما فعل أسلافنا الصالحون من قبل ونجحوا.

الغيرة اللغوية

في الصحيح: " إن الله تعالى يغار ، وإن المؤمن يغار ، وغيرة الله أن يأتي المؤمن ما حرم به عليه[2] والمسلم الحق يغار على حرمات الله إذا انتهكت ، ويغار على عرضه وكرامته وسمعته وقبيلته وعائلته ووطنه وأمته. لكننا – للأسف الشديد – لا نكاد نحس بغيرة أبناء الإسلام ، حتى العرب منهم ، ثم لغتهم ، بل قد يغار الواحد منهم على دينار أو درهمه ولا يغار على لغته ، فرفع أسعار السلع أو تجميد العلاقات أو فرض رسوم أو ضرائب يثير ثائرة الكثيرين ، أما أن تنتهك قواعد اللغة صباح مساء ، ويُسخف بها في وسائل الإعلام ، وتطرد بلا رحمة من مملكتها الخاصة – ساحات العلم والتعليم – فلا يحرك ذلك حمية أحد أو غيرته ، بل نجد – واخجلاه – من أبناء العرب والمسلمين من يساهم في هذا بجهود (غير مشكورة) ويتباهى به.

---

1 ٣):١١

2 (صحيح الجامع: ٩٥٠٥)

الانبهار بالغرب

لا شك أن من أسباب ذلك انبهار البعض بالغرب وعلمائه إلى حد نسيان عداوتهم الثابتة والدائمة لديننا وأمتنا ، فاتخذناهم أصدقاء وأولياء وبطانة رغم تحذير الله لنا في القرآن الكريم [1] ، فصرنا نصدق كل ما يلقونه إلينا ، ومنه أن كرَّهونا في لغتنا وحبَّبوا إلينا لغاتهم فتبعناهم قرودا وببغاوات.

إنه لابد من تربية الأجيال على الاعتزاز بالأمة والجماعة ، وعلى الارتباط بالقرآن ولغته ، وعلى فطم أنفسنا عن التبعية الذليلة للأعداء.

العزة اللغوية

لقد تركنا حرمة لغتنا العربية نهبا للأعداء وللعاقِّين من أبناء أمتنا وغابت العزة اللغوية من مجتمعاتنا العربية والإسلامية. والعزة خلق يمنح صاحبه قوة النفس وإباء الضيم ، ويعصمه من الوقوع في الهوان أو الرضا به ، لا يساوم على ذلك ولا يترخص ، وإلا بدأ طريق المنحدر الذي لا يقف إلا عند قاع الذلة والخزي.

مَنْ يَهُنْ يَسهُل الهوان عليه ما لِجُرحٍ بميِّتٍ إيلامُ

لا ينتظر فاقد العزة أن يوقره الآخرون ، أو حتى يبالوا بجرح كرامته:

إذا أنتَ لم تعرِف لنفسك حقَّها هواناً بها كانت على الناس أهونا

إذا كان شاعر النيل حافظ إبراهيم – رحمه الله – يرى أن كثرا من الأمم قد عزت بعز لغاتها ، فيقول:

أرى لرجال الغرب عزاً ومَنعةً وكم عز أقوام بعز لغات

فإن الإسلام يعلمنا أن مصدر العزة الحقيقية لهذه الأمة الإسلامية إنما هو إيمانها بالله تعالى مالك العزة " ولله العزة ولرسوله وللمؤمنين ".

---

[1] المائدة: ٥١ ، النساء: ١٢ ، الممتحنة:١

مكانة اللغة .. ودورها

واللغة عند علماء الحضارة هي المحتوى الحقيقي لأي حضارة ، باعتبارها الوسيلة التي تنتقل عبرها العلوم والخبرات الإنسانية ، من جيل إلى جيل ، ومن أناس إلى أناس.[١]

وبقدر عظمة المحتوى الحضاري للأمة يعظم دور لغتها ويعظم واجب حمايتها ، كما يعظم الخطر حين تتعرض اللغة للتهديد في أي من مقوماتها أو وظائفها الحضارية ، وليس أعظم من حضارة الأمة المسلمة مهما تضخمت الحضارات الدنيوية المادية. من هنا تشعر الأمة بأكبر المخاطر على وجودها عندما تكون لغتها مهددة. ومن هنا أيضا بات من المسلّمات "أن اللغة هي الطليعة الأولى لأي غزو عسكري ثقافي أو حضاري ، وهي البوابة التي يدخل من خلالها الاستعمار ليرض ثقافة وقيمة لتحويل الشعب المغزو إلى مجرد تابع ذليل ومسخ مشوَّه.[٢]

لقد كان العرب قبل الإسلام يتيهون بلسانهم العربي فخرا على سائر الأمم ، ومع ذلك لم يقبل على تعلمه أحد لهوان شأن العرب على الناس ، ولما جاء الإسلام وانتشر نوره خارج الجزيرة دخل الناس فيه أفواجا وأحبوا لغة القرآن حبا ملك عليهم أفئدتهم حتى نافسه ابناءها بما تملك ناصيتها حتى في أخص علومها اللغوية ، وسجلت كتب طبقات اللغويين والنجاة أسماء المئات منهم وتراجمهم في عصر ومصر ، ومنهم من حاز المقام الأرفع والأشهر في ذلك ، مثل سيبويه الفارسي الأصل.

حرب على لغة القرآن

---

[١] أحمد جوده ، الشرق الأوسط ، ١٩٩٤/٤/١٢

[٢] الشرق الأوسط ، المصدر السابق.

إن مخططات المؤامرة على لغة القرآن وإصنافها وإقصائها عن ميادين العلم والثقافة جارية بنشاط في كل صعيد وميدان ، تنفيذا للسياسة التي وضعها " مستر دنلوب " الإنجليزي المستشار – بل الموجه الأعلى – لوزارة المعارف المصرية " ، وهي السياسة التي صارت – إلى حد كبير نموذجا يطبق في كل البلاد العربية ، والتي أتت أكلها المرّ فيما نراه واقعا من ضعف لغوي مؤسف في مقابل انتشار اللغات الأجنبية على الألسنة وفي مؤسسات التعليم ، ومن رفض لدعوات التعريب وتعثر وانتكاس لتجاربه في كل البلاد العربية تقريبا.

ولا تزال العربية حتى اليوم في معقلها الأصلي تواجه تلك الحرب التي تنفَّذ اليو – واخزياه !! – بأيدي أبنائها المزيد ، يخربون بيوتهم بأيديهم ، بحيث أن الجهاد ضد هذه اللغات الشاملة بات فرض عين على كل مسلم وعربي ، فالغزو قد وصل إلى عقر الدار ، ولكل جهاد رجاله وخططه وأسلمته. وكل من يقعد عند هذا الجهاد ويخله إلى الأرض فهو آثم ، وكيف وهو يرى شخصية الأمة تغتال ، ومقوماتها تنتهك ، وعوامل تماسكها تحطم ثم يتقاعس ؟! أما أولئك الذين يقفون مع العدو في خندق واحد يؤازرون مخططاته ويحرسون تنفيذها فهم لا يقلون خيانة عمن يعمل لحساب العدو أيام الحرب العسكرية ، وما يستحق هؤلاء يستحقه أولئك ، بل إن القتل الحضاري ذلا ومسخا وتذويبا لأشد وأنكى من القصف بالراجمات ودك البيوت على الرؤوس.

ولغتنا أعز علينا وأكرم

إنه ليس لنا خيار إلا أن نصون لغتنا بكل وسيلة ولا نشارك المضيعين لها في جرمهم. إن اليهود – شذاذ الآفاق – قد أحيوا لغتهم العبرية من شبه موت امتد ألفي عام ، وتمكنوا خلال أقل من نصف قرن قبل قيام دولتهم

وتجمعهم فيها من جعلها جاهزة لتبدأ دورها أداة تواصل في كل المجالات ، وهي الآن كذلك ، ولا تزاحمها أي لغة أجنبية. أليس عارا وفضيحة أن نترك لغتنا الحية المحفوظة بوعد الله بكتابه تنكمش وتنزوي كما يريد لها أعداؤها ؟! وإذا كنا قد ابتلينا بمن يخون الأمانة فأين دورنا نحن؟.

التعريب .. توبة بعد ردة طال مداها

إن التعريب في أي مجال أو مستوى يجب أن ينظر إليه على أنه توبة واجبة من الأمة بعد ردة طال مداها وتفاقمت آثارها على كل صعيد ، فالأصل أن الأمة (العربية) لا تستحق هذا الوصف ما م تكن اللغة العربية هي لغتها الرسمية قولا وفعلا – دستوريا وعمليا ، فإذا خانت دستورها وتخلت عن وصفها ، واستعاضت عن لغتها بلغات أجنبية في مجالات ثقافتها أو علومها أو تعليمها ، أو بلهجات عامية ، وقعت في الإثم حتى تثوب إلى رشدها وتتوب إلى ربها ، ولا تتحقق التوبة إلا إذا كانت خطة التعريب شاملة وصادقة أسوة بموافقف الشعوب الأخرى التي تعتز بها بلغاتها وتغار عليها. ولابد قبل ذلك التعريب رفعه وبعثه من إيمن به صادق ، وعزيمة عليه ماضيه ، وولاء للغة ودورها في الأمة حاضرا ومستقبلا لا يشوبه وهن ، وتنفيذ ومتابعة بكل صدق وجد وإخلاص لا يعتريها فتور ولا تبجيل.

التعريب لا يعني محاربة اللغات الأجنبية

يظن البعض أن التعريب يعني إهمال تعلم وتعليم اللغات الأجنبية ، وهذا خطأ بيِّن ، تصدى لتنفيذه كل من كتبوا داعين إلى التعريب ، بل هم شددوا على وجوب العناية بتعليم الدارسين إحدى اللغات الحية – كالإنجليزية

– بالقدر الذي يمكنهم من الاتصال المستمر بالمصادر الأجنبية والوقوف على تطورات العلم ، بل يؤكدون على ضرورة أن تنشأ على مستوى الأمة مراكز ومؤسسات عالية الكفاءة والإمكانات البشرية والمادية لتتولى متابعة كل جديد في مختلف التخصصات ونقله إلى العربية دون تأخير ونشره ليكون قناة اتصال مفتوحة أمام المتخصصين وجماهير الأمة على السواء ، ومصدرا ثريا لتجديد طاقة اللغة وإغنائها بما تستدعيه عملية الترجمة – ضرورة – من المواجهة المستمرة لسيل المصطلحات المستخدمة في كل مجال ، وإيجاد المقابلات العربية أو المعربة لها عبر عشرات الموارد الغنية التي يتمتع بها اللسان العربي ، ومن تلك التأكيدات على سبيل المثال:

* " التأكيد على أن تعريب التعليم العالي يتطلب إجادة الدارسين إجادة تامة للغات الحية الأجنبية والتمكن منها " ، (محضر الاجتماع الأول للفريق الخاص بوضع برنامج زمني لتعريب التعليم العالي – في جامعات دول مجلس التعاون – البحرين ١٤٠٨ هـ – ١٩٨٧ م).
* " وضع برنامج أكاديمي لجميع كليات الجامعة بتخصصاتها المختلفة لتعزيز مستوى الطالب باللغة الأنجليزية لضمان قدرته على مواكبة التطورات العلمية العالمية " (من توصيات الحلقة النقاشية الأولى للجنة التعريب – الكويت ٢/٤/١٩٨٩م)

التعريب: لماذا أخفقنا الآن ونجحوا ؟

لقد تعرضت الأمة المسلمة العربية اللسان لقضية التعريب عدة مرات ، فمثلا:

١- واجت الأمة في القرن الأول الهجري مرحلة تطلبت الاحتكاك والتفاعل مع حضارات أمم أخرى: يونانية ورومانية وفارسية وهندية وسريانية ... ألخ. وكان المسلمون صادقين في بناء حضاراتهم فأخذوا من كل

المصادر بمعايير دينهم ، وطاوعت اللغة المترجمين والمنقِّحين فلم تعجز عن نقل أي نص في أي من مجالات العلم ، استوعبت مضامينه ومصطلحاته ، وظهرت من خلال ذلك عبقرية العربية ومرونتها العالية وثراؤها العريض.

" لقد نجح أسلافنا في تعريب العلم وتوطينه ، وجعلوه جزءا من الحياة الاجتماعية بعد أن نقلوه عن اليونان والغرب والهنود وغيرهم من الشعوب. بلسان عربي بيّين ، ودون أن تعترض سبيلهم مشكلة تبهتهم كما حالنا اليوم[1]

٢- بعد قرون من ضعف اللغة العربية وانكماش دورها نتيجة تمزق المسلمين وتخلفهم واجهت الأمة تحديا جديدا حين اصطدمت بالحضارة الغربية القوية المتقدمة ، وذلك منذ الحملة الفرنسية على مصر عام ١٧٩٨م ، وحاول محمد علي منذ توليه حكم مصر (١٨٠٥-١٨٤٨) إنشاء دولة حديثة ولم يكن أمامه سوى الغرب وعلومه فاتجه إليها ، ولكنه لم يعتمد اللغات الأجنبية أداة للتعليم في المدارس والكليات والمؤسسات التي أنشأها بل اعتمد العربية ، وكان يرافق كل أستاذ أجنبي مترجم عربي لينقل للطلاب فوريا ما يقوله المحاضر الأجنبي ، وقامت حركة نشطة لترجمة الكتب العلمية ، ولولا تدخل الدول الغربية عسكريا ، ثم سياسيا وتعليميا للقضاء على هذه التجربة لآتت أكلها.

٣- تجربة سوريا في تعريب الطب التي بدأت عام ١٩١٩ ولا تزال كلية الطب بجامعة دمشق تدرس كل تخصصات هذا الميدان بالعربية ، فضلا عن تجارب أخرى أقل نجاحا.

---

[1] يحيى عبد الرؤوف جبر: الترجمة والتعريب ضرورة قومية ملحة (مجلة التعريب ، دمشق ، عد : ٥ ، ١٩٩٣ ص ٣٣)

وفيما عدا ذلك فإن كل جامعات العرب تقريبا لا تزال غير كاملة التعريب ، كثير من كلياتها (خاصة العلمية منها كالهندسة والطب والعلوم) ، لا تزال حتى اليوم تدرِّس بلغة المستعمر الأوروبي (الإنجليزية في المشرق والفرنسية في المغرب) على الرغم من عشرات المؤتمرات ومئات اللجان والحلقات وآلاف التوصيات المطالبة بإلحاح بضرورة التعريب والمحذرة بشدة من خطورة استمرار وضع التغريب.

لم كل هذا الإخفاق المشين في بلادنا اليوم ، ما لنا من تجارب ناجحة في الماضي ، ومع نجاح كل أمم أرض تقريبا – باستثناء أمثالنا – في التمكين للغتها وفرضها وجعلها لغة الأمة في كل مجال؟! ألأن أسلافنا كانوا أكثر استمساكا بدينهم واعتزازا بلغتهم ووعيا بدورها في مسيرة حضارتهم ؟ وما بال الأمم الأخرى نجحت ومنطلقاتها قومية أو وطنية ، إذ ليس لدينا علاقة تُذكر بلغاتها ؟ لقد تملَّك زمام أمور أمتنا القوميون ومن يسمون أنفسهم " القوى الوطنية " ، فما بالنا في عهدهم لم نزدد إلا تضييعا لهويتنا ولغتنا وارتماء في أحضان مستعمرينا والمتآمرين علينا ؟!.

أنجح الآخرون لأن حكوماتهم ومثقفيهم وجُلّ شعوبهم على رأي واحد ناقضية التمكين للغاتهم ، بينما نجد أنفسنا متفرقين متنابذين حول هذه القضية: فئة تغار على لغة الأمة فتنادي بالتعريب فإذا بفئة أخرى تتصدى لها وتفتعل العراقيل في طريق التعريب ، بينما نجد من بيدهم السلطان يمطروننا بوابل من التصريحات والقرارات عن أهمية اللغة وضرورة الإسراع بالتعريب ، ولكن التوصيات الداخلية والإمكانات المادية تدعم " التغريب " و " التغريبيين " على طول الخط ، فأنى يأتينا النجاح ؟!

هذا الكتاب .. ومحتوياته

إنه لابد من تضافر الجهود لإنجاح مسيرة التعريب ، الصبر والمثابرة للمضي قدما في طريق التعريب .. وهذا الكتاب هو خطوة متواضعة في هذا الطريق ، حيث يتناول فرعا من فروع علم التحليل العددي ، وهو الحلول العددية للمعادلات التفاضلية العادية ، فيبدأ الفصل الأول بمقدمة عامة عن المعادلات التفاضلية العادية ومسائل القيمة الابتدائية وتفسيرها الهندسي ، وبيان أهمية هذا الموضوع الحاجة إلى حل المعادلات التفاضلية عدديا ، وهدف الحل العددي للمعادلة التفاضلية ، ثم تتتابع فصول الكتاب في بيان دراسة ومناقشة طرق عديدة للحصول على هذه الحلول العددية ، فيناقش الفصل الثاني طريقة أويلر وهي طريقة بسيطة وسهلة مع توضيح أنواع الأخطاء التي تحدث أثناء الحصول على هذه الحلول العددية ، وانتشار وتراكم هذه الأخطاء ، مع دراسة لدقة طريقة أويلر وتقاربها ، ثم يتناول الفصل الثالث طريقة أويلر المحسَّنة والتي يطلق عليها أيضا طريقة هوين ، وفي الفصل الرابع ندرس طريقة متسلسلة تايلور ، ويتناول الفصل الخامس طرق رونج – كوتا المتعددة

ومن المراتب المختلفة (الرتبة الثانية والثالثة والرابعة والنونية) ، وطريقة رونج–كوتا –فهليزج ، مع دراسة كيفية التحكم في حجم الخطوة، ودراسة موضوع استقرار الطريقة العددية. والفصل السادس يوضح استخدام الطرق المسماة: طرق التقدير والتصحيح، مع إعطاء ثلاثة أمثلة لهذه الطرق: طريقة أدمز – باشفورت – مولتنى ، طريقة ميلني – سمبسون ، وطريقة هامنج . ويناقش الفصل السابع كيفية تطبيق الطرق العددية المعلومة لحل نظم المعادلات التفاضلية. وأما الفصل الثامن فيعرَّف مسألة القيمة الحدية، ويبين كيفية حلها عددياً عن طريق اختزالها إلى مسألتي قيمة ابتدائية، ويشرح

طريقة الإطلاق الخطي لحل هذا النوع من المسائل . ويتناول الفصل التاسع والأخير طريقة الفرق المحدود.

وقد اتبعنا في ترتيب فصول الكتاب ومنهج عرض الطرق العددية التي ناقشناها المرجع رقم [٧٦] المعطى ضمن قائمة الكتب والمراجع المذكورة بنهاية الكتاب ، وهو مرجع جيد في التحليل العددي يهتم بالتطبيق العملي لهذه الطرق وتوضيح خوارزميتها وتلخيصها في نهاية كل فصل ، قومنا بتعريب بعض الأمثلة عليها وفي نهاية كل فصل من فصول هذا الكتاب – الذي بين يدي القارئ – يوجد عدد كبير من المسائل التي تعطى أفكاراً وتطبيقات متنوعة لإلقاء الضوء على النقاط والطرق التي ناقشها هذا الفصل وبعد نهاية الفصل الأخير توجد كذلك بعض المسائل والتمرينات العامة التي تتناول نختلف الطرق التي ناقشها الكتاب وكذلك طرقاً أخرى يستطيع الطالب فهمها واستيعابها بعد دراسة الطرق التي وردت في الكتاب وفي أخر الكتاب نماذج لحلول وأجوبة العديد من المسائل في التمرينات التي وردت في فصول الكتاب وكذلك حلول وأجوبة التمرينات العامة ، ويمكن للطالب الرجوع إلى هنا الحلول والأجوبة بعد بذل الجهد أولاً في حل هذه المسائل والتمرينات، ومقارنة الأجوبة التي حصل عليها مع تلك الأجوبة وذلك إتماماً للفائدة بإذن الله تعالى.

شكر وتقدير

ونود هنا أن نكرر شكرنا الجزيل – الذي قدمناه في كتبنا السابقة – لكل من يساهم بأي نوع من الجهد في قضية تعريب هنا العلوم ، وظهور وتداول هذه الكتب العلمية باللغة العربية ، ونخص بالذكر

- إخواننا وأخواتنا وأبناءنا وبناتنا وطلاب وطالبات الجامعة الذين يقبلون على دراسة هذه لمناهج وقراءة تلك الكتب ومناقشة موضوعاتها فكانوا خير عون لنا علي لتطويرها.
- ودار القلم للنشر والتوزيع بالكويت التي لا تدخر وسعاً في التعاون معنا لتيسير نشر وتوزيع الكتب الدراسية الجامعية التي تخدم قضية التعريب.
- الأخ الفاضل الأستاذ السيد البدوي محمد أحمد بقسم الرياضيات وعلم الحاسوب لما يبذله من جهد مستمر في طباعة هذه الكتب العلمية باللغة العربية متحلياً بالصبر والأناة لإخراجها بصورة طيبة.

نسأل الله العلي القدير أن يبارك في هذا الجهد المتواضع وأن ينفع به , أن يسهل لنا جميعاً به طريقاً إلى الجنة، قارئين ودارسين ومعلمين، وأن يجعل من العلم الذي يُنتفع به في حياتنا وبعد موتنا، وأن يجعله في ميزان حسناتنا يوم نلقى الله عز وجل، يوم لا ينفع مال وبنون إلا من أتى الله بقلب سليم، وصل الله على خير خلقه محمد وعلى آله وصحبه ومن نبعه . وبإحسان إلى يوم الدين.

الفصل الأول

مقدمة عن المعادلات التفاضلية
Introduction to Ordinary Differential Equations

تعريف

المعادلة التفاضلية العادية (Ordinary Differential ODE Equation) هي معادلة تحتوي على متغير مستقل (independent variable) واحد (x مثلا) ، ومتغير تابع (dependent variable) واحد (y مثلا) ، وعلى الأقل (at least) واحد من مشتقاته (derivatives) $\left(y', y'', y^{(3)}, ...\right)$ بالنسبة للمتغير المستقل.

فمثلا كل من المعادلتين التاليتين تعد معادلة تفاضلية :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = 1 - e^{-t} \qquad (2)$$

حيث x هو المتغير المستقل في المعادلة (1) و t هو المتغير المستقل في المعادلة (2) ، و y هو المتغير التابع في كل من المعادلتين.

تعريف:

المعادلة التفاضلية ذات الرتبة النونية (n^{th}- order differential equation) هي معادلة تفاضلية (DE) أعلى مشتقة (highest derivative) فيها من الرتبة النونية (order n).

فمثلا المعادلة التالية هي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية (2nd – order DE) :

$$y'' = -\alpha^2 y + y'$$

حلول المعادلة التفاضلية (Solutions of a DE)

أي علاقة (relation) / دالة (function) تعطي المتغير التابع بدلالة المتغير المستقل وتحقق المعادلة التفاضلية تسمى حلا لهذه المعادلة.

مثال ١-١: أوجد حلول المعادلة التفاضلية المذكورة سابقا:

$$\frac{dy}{dt} = 1 - e^{-t} \qquad (2)$$

الحل:

حيث أن المتغير المستقل t فقط هو الذي يظهر في الطرف الأيمن ، يمكننا أن نحصل على حل للمعادلة بالتكامل (integration):

$$y(t) = t + e^{-t} + C \qquad (3)$$

حيث C هو ثابت التكامل (constant of integration).

فجميع الدوال في العلاقة (3) هي حلول للمعادلة التفاضلية (2) لأنها تحقق المتطلب (requirement):

$$y'(t) = 1 - e^{-t}$$

وهذه الدوال تكون عائلة المنحنيات (family of curves) المبينة في الشكل التالي (شكل ١-١) الذي يبين منحنيات الحل (solution curves) $t + e^{-t} + C$

شكل ١-١

استطعنا عن طريق التكامل مباشرة إيجاد صيغة صريحة (explicit formula) للدوال المعطاة في العلاقة (3) ، ويوضح الشكل ١-١ أنه توجد درجة واحدة من الحرية (one degree of freedom) في اختيار الحل ، ونعني بذلك حرية اختيار قيمة ثابت التكامل C . وبتغيير قيمة الثابت C

نستطيع تحريك منحنى الحل (solution curve) لأعلى أو لأسفل ، ويمكننا الحصول على منحنى معين كي يمر بأي نقطة نشاء.

مثال ١-٢:

يتناسب معدل تغير درجة حرارة جسم ما (body/object) عند أي لحظة زمنية t تناسبا طرديا (directly proportional) مع الفارق بين درجة حرارته y ودرجة حرارة الوسط المحيط (surrounding medium) A. اكتب المعادلة التفاضلية التي تعبر عن هذه الحقيقة [والتي يطلق عليها : قانون نيوتن لانخفاض / لارتفاع درجات حرارة الأجسام (Newton's law of cooling/warming)].

وإذا علم أن درجة حرارة الجسم في البداية (أي عند الزمن t=0) كانت تساوي y_0 [ويسمى هذا شرطا ابتدائيا (initial condition)] فأوجد حلول المعادلة التفاضلية.

الحل :

$$\frac{dy}{dt} = -k(y - A)$$

حيث k ثابت موجب ، ووجود الإشارة السالبة يضمن لنا أن يكون معدل تغير درجة حرارة الجسم $\frac{dy}{dt}$ سالبا عندما تكون درجة حرارة الجسم أكبر من درجة حرارة الوسط المحيط.

الشرط الابتدائي : $y(0) = y_0$

وبالتالي فيمكننا تلخيص معلومات المسألة المطلوب حلها فيما يلي:

$$\frac{dy}{dt} = -k(y - A); \qquad y(0) = y_0 \qquad (4)$$

هنا لا نستطيع إجراء عملية التكامل مباشرة ، ولكن يمكننا باستخدام طريقة فصل المتغيرات (separation of variables) أن نحصل على الحل:

$$y = A + (y_0 - A)e^{-kt} \qquad (5)$$

وواضح أن الحل يعتمد على قيمة y_0 ، ولكل اختيار (choice) جديد لقيمة y_0 نحصل على منحنى حل (solution curve) مختلف مقابل له.

وتحدد قيمة y_0 الفعلية منحنى الحل المطلوب. ويبين شكل ١-٢ عدة منحنيات حل (solution curves) :

$$y = A + (y_0 - A).e^{-kt}$$

شكل ١-٢

ومن الشكل نلاحظ أنه مع ازدياد قيمة الزمن t فإن درجة حرارة الجسم تقترب من درجة حرارة الوسط المحيط / الغرفة (room temperature) . وإذا كانت درجة حرارة الجسم الابتدائية y_0 أقل من درجة حرارة الوسط المحيط $y_0 < A$ فإن الجسم ترتفع درجة حرارته بدل أن تنخفض.

مسألة القيمة الابتدائية Initial Value Problem (I.V.P.)

تعريف :

يطلق على الدالة $y = y(t)$ أنها **حل لمسألة القيمة الابتدائية**

$$y' = f(t,y); \qquad y(t_0) = y_0 \qquad (6)$$

على الفترة (interval) : $[t_0,b]$ إذا كانت :

y دالة قابلة للتفاضل (differentiable function) ، وكانت

$$y(t_0) = y_0 \quad \& \quad y'(t) = f(t, y(t)) \quad \forall t \in [t_0, b].$$

ولاحظ أن منحنى الحل $y = y(t)$ يجب أن يمر بالنقطة الابتدائية (t_0,y_0).

التفسير الهندسي Geometric Interpretation

يمكننا إيجاد ميل (slope) منحنى الحل $y = y(t)$ عند كل نقطة (t,y) في المنطقة المستطيلة

$$R: \quad a \le t \le b, \qquad c \le y \le d$$

باستخدام الصيغة الضمنية (implicit formula):

$$m = f(t,y(t))$$

وبالتالي فيمكننا حساب القيم

$$m_{i,j} = f(t_i,y_j)$$

خلال هذه المنطقة المستطيلة ، وكل قيمة $m_{i,j}$ تمثل ميل الخط المستقيم المماس لمنحنى حل يمر بالنقطة (t_i,y_j).

ويعرف **حقل الميل (slope field) او حقل الاتجاهات (direction field)** بأنه شكل يوضح قيم الميل $\{m_{i,j}\}$ عبر المنطقة (region). ويمكن أن يستخدم لإعطاء صورة (visualizing) لكيفية ملاءمة (fitting) منحنى حل (a solution curve) لشرط الميل (slope constraint).

وللتحرك على منحنى حل يجب أن نبدأ عند النقطة الابتدائية ونختبر حقل الميل لتحديد الاتجاه الذي نتحرك فيه. ثم نتحرك خطوة (step) أفقية صغيرة من t_o إلى $t_o + h$ وخطوة رأسية $hf(t_o,y_o)$ حتى يكون للإزاحة (displacement) الناتجة الميل المطلوب. فتكون النقطة التالية على منحنى الحل هي (t_1,y_1).

ونكرر هذه العملية لتستمر رحلتنا عبر المنحنى. ونظرا لأننا نقوم بإجراء عدد محدود من الخطوات فإن هذه الطريقة تؤدي إلى حل تقريبي.

مثال ١-٣:

نفرض أن :

$$y' = f(t,y) = \frac{t-y}{2}$$

أ) ارسم حقل الميل في المنطقة المستطيلة:

$$R: \quad 0 \le t \le 5 \ , \quad 0 \le y \le 4$$

ب) ارسم منحنى الحل المقابل للقيمة الابتدائية:

(i) $y(0) = 1$ (ii) $y(0) = 4$

الحل: الشكل التالي (شكل ١-٣) يبين حقل الميل في المنطقة المطلوبة ، وموضح عليه كذلك منحنيا الحل المطلوبان ، حيث:

(i) للقيمة الابتدائية $y(0) = 1$ ، يكون الحل

$$y(t) = 3e^{-t/2} - 2 + t$$

(ii) للقيمة الابتدائية $y(0) = 4$ ، يكون الحل

$$y(t) = 6e^{-t/2} - 2 + t$$

شكل ١-٣

تعريف : نفرض أننا قد أُعطينا المنطقة المستطيلة

$$R = \{(t,y) : a \le t \le b \quad , \quad c \le y \le d\}$$

ونفرض أن $f(t,y)$ دالة متصلة على المنطقة R.

يقال أن الدالة f تحقق شرط "**ليبشتز**" **(Lipschitz condition)** في المتغير y على المنطقة R إذا وُجد ثابت $L > 0$ بحيث تحقق الشرط:

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \le L.|y_1 - y_2| \quad \forall (t,y_1),(t,y_2) \in R.$$

ويطلق على L ثابت "ليبشتز" للدالة f.

نظرية ١-١:

نفرض أن $f(t,y)$ معرفة على المنطقة R.

إذا وُجد ثابت $L > 0$ بحيث كان

$$|f_y(t,y)| \le L \qquad \forall (t,y) \in R$$

فإن f تحقق شرط " ليبشتز " في المتغير y بثابت " ليبشتز " L على المنطقة R.

البرهان:

ثبِّت t واستخدم نظرية القيمة المتوسطة (mean value theorem) لتحصل على c_1 حيث $y_1 < c_1 < y_2$ وبحيث يكون

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |f_y(t,c_1)(y_1 - y_2)| =$$

$$= |f_y(t,c_1)|.|(y_1 - y_2)| \le L.|y_1 - y_2| .$$

نظرية ١-٢: (وجود حل وحيد) (Existence and Uniqueness of Solution)

نفرض أن f(t,y) دالة متصلة في منطقة

$$R = \{(t, y): t_o \le t \le b\,, \quad c \le y \le d\}.$$

إذا كانت f تحقق شرط " ليبشتز " على المنطقة R في المتغير y ، وكانت $(t_0\,, y_0) \in R$ فإن مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \qquad (6)$$

يكون لها حل وحيد (unique solution) y = y(t) على فترة جزئية ما (some subinterval): $t_o \le t \le t_o + \delta$.

البرهان:

انظر أي مرجع متقدم (مثل المرجع [26]) عن المعادلات التفاضلية.

مثال ١-٤:

اثبت أن مسألة القيمة الابتدائية (I.V.P.) المذكورة في مثال ١-٣ ، حيث : $y' = f(t, y) = \frac{t-y}{2}$ لها حل وحيد.

الحل :

$$f(t, y) = \frac{t-y}{2}$$

$$\Rightarrow \quad f_y(t, y) = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \left|f_y(t, y)\right| = \frac{1}{2}$$

وباستخدام نظرية ١-١ فإن ثابت " ليبشتز " هو $L = \frac{1}{2}$ ، وبناءً عليه فباستخدام نظرية ١-٢ يكون لمسألة القيمة الابتدائية المعطاة حل وحيد.

الحاجة إلى حل المعادلات التفاضلية عدديا:

تستخدم المعادلات التفاضلية عموما في عمل النماذج الرياضية (mathematical models) في التطبيقات العلمية والهندسية. وكثيرا ما تظهر لنا معادلات تفاضلية ليس لها حل تحليلي (analytic solution) معلوم ، أو ليس من السهل إيجاد هذا الحل ، أو قد يكون هذا الحل التحليلي معقدا (complicated) وغير مناسب أو غير ميسَّر وغير ملائم (not

(convenient للحساب المباشر (direct calculation) ، ونحتاج إلى تقريبه (be approximated) (مثلا إذا كان هذا الحل متسلسلة لا نهائية (infinite series)). في مثل هذه الحالات نلجأ إلى حل المعادلة التفاضلية عدديا.

هدف الحل العددي للمعادلة التفاضلية:

يقصد بالحل العددي للمعادلة التفاضلية أن نعبِّر (express) عن العلاقة (relationship) بين المتغير المستقل (x مثلا) والمتغير التابع (y مثلا) في صورة جدول (table) يعطي قيما y_i مقابلة لمجموعة (set) x_i من قيم x المتقاربة فيما بينها (closely spaced) والتي تغطي (cover) المنطقة المطلوبة (required range) (كأن تكون مثلا في المنطقة $x_o \le x \le x_n$).

والفصول التالية من هذا الكتاب تستعرض الطرق القياسية (standard methods) لإيجاد الحلول العددية للمعادلات التفاضلية العادية ونظم المعادلات التفاضلية (systems of differential equations) ومسائل القيم الحدودية (boundary value problems).

ورغم أن الحلول العددية التي نحصل عليها هي – كما أشرنا سابقا – عبارة عن قائمة أعداد أو جدول من عدة قيم ، إلا أن هذه الأعداد والقيم تفيدنا في تحديد / رسم المسار (plotting the path) الذي يصل (joining) بين مجموعة النقاط التقريبية $\{(x_i , y_i)\}$ (approximation points) وبالتالي رسم المسار الذي يوضح بصورة تقريبية العلاقة بين x , y.

فمثلا النظام غير الخطي (nonlinear system) التالي:

$$x' = f(t,x,y) = x - xy - \frac{x^2}{10},$$

$$y' = g(t,x,y) = yx - y - \frac{y^2}{20},$$

مع الشرط الابتدائي : $x(0)=2\,,\qquad y(0)=1$

وللفترة : $0 \le t \le 30$

يؤدي إلى حل عددي (وليس موضوعنا الآن كيفية الحصول على هذا الحل العددي) لو وضعنا أعداده المتقابلة $\{(x_i\ ,\ y_i)\}$ في نقاط في شكل بياني ، ووصَّلنا بين هذه النقاط لحصلنا على الشكل التالي (شكل ١-٤) الذي يوضح بصورة تقريبية العلاقة بين x , y.

شكل ١-٤

ملاحظة ١:

أي معادلة تفاضلية من الرتبة n (n^{th} – order DE) يمكن أن تختزل عادة إلى نظام مكافئ (equivalent system) مكون من معادلات تفاضلية عددها n وكل منها من الرتبة الأولى (first-order) ، وذلك عن طريق تعريف متغيرات جديدة عددها n-1.

فمثلا المعادلة التفاضلية التالية وهي من الرتبة الثانية:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\alpha^2 y \qquad \text{(حيث } \alpha \text{ ثابت معلوم)}$$

يمكن أن تعاد كتابتها بعد تعريف المتغير الجديد z :

$$z = \frac{dy}{dt}$$

كمعادلتين تفاضليتين كل منهما من الرتبة الأولى:

$$\frac{dz}{dt} = -\alpha^2 y \qquad \&$$

$$\frac{dy}{dt} = z.$$

ولذلك فيكفي في الحقيقة أن نأخذ في الاعتبار دراسة المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى فقط:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (*)$$

ملاحظة ٢:

يمكن إثبات أن أي طريقة تستخدم لحل المعادلة التفاضلية (*) عدديا يمكن أيضا أن تستخدم لحل مجموعة معادلات تفاضلية آنية من الرتبة الأولى (set of simultaneous ODE's of 1st order).

تمرينات رقم ١

١-١) بالنسبة لكل من المعادلات التفاضلية التالية:

أ) اثبت أن y(t) المقابلة المعطاة هي حل المعادلة التفاضلية بتعويض كل من y(t) و y′(t) في المعادلة التفاضلية : $y'(t) = f(t, y(t))$.

ب) استخدم نظرية ١-١ لإيجاد قيمة لثابت ليبشتز L للمنطقة المستطيلة R : $0 \le t \le 3$, $0 \le y \le 5$.

1. $y' = t^2 - y$, $y(t) = C \exp(-t) + t^2 - 2t + 2$
2. $y' = 3y + 3t$, $y(t) = C \exp(3t) - t - \frac{1}{3}$
3. $y' = -ty$, $y(t) = C \exp(-t^2/2)$
4. $y' = \exp(-2t) - 2y$, $y(t) = C \exp(-2t) + t \exp(-2t)$
5. $y' = 2ty^2$, $y(t) = 1/(C - t^2)$

١-٢) بالنسبة لكل من المعادلات التفاضلية التالية :

أ) ارسم حقل الميل $m_{i,j} = f(t_i , y_j)$ عبر المنطقة:

$0 \le t \le 4$, $0 \le y \le 4$

ب) ارسم منحنيات الحل المقابلة ، والمعطاة مع المعادلة التفاضلية.

1. $y' = f(t,y) = -t / y$

منحنيات الحل (دوائر circles):

$y(t) = (C - t^2)^{1/2}$ for $C = 1,2,3,9$

2. $y' = f(t,y) = t / y$.

منحنيات الحل (قطاعات زائدة hyperbolas) :

$y(t) = (C + t^2)^{1/2}$ for $C = -4,-1,1,4$.

3. $y' = f(t,y) = 1 / y$.

منحنيات الحل (قطاعات مكافئة parabolas) :

$y(t) = (C + 2t)^{1/2}$ for $C = -4,-2,0,2$.

4. $y' = f(t,y) = y^2$.

منحنيات الحل (قطاعات زائدة) :

$$y(t)=\frac{1}{C-t} \quad \text{for} \quad C=1,2,3,4$$

١-٣) من أمثلة مسائل القيمة الابتدائية IVP التي لها أكثر من حل واحد المسألة :

$$y'=\frac{3}{2}\ y^{1/3} \quad ; \quad y(0)=0$$

أ) اثبت أن $t \geq 0$; $y(t) = 0$ حل للمسألة.

ب) اثبت أن $t \geq 0$; $y(t) = t^{3/2}$ حل للمسألة.

ج) هل المعلومات السابقة تعارض نظرية ١-٢ ؟ ولماذا ؟

١-٤) نفرض أن لدينا مسألة القيمة الابتدائية

$$y'=\left(1-y^2\right)^{1/2} \quad ; \quad y(0)=0$$

أ) اثبت أن $y(t) = \sin(t)$ حل للمسألة على الفترة $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

ب) حدِّد أكبر فترة (largest interval) يتواجد الحل (solution exists) عبرها.

١-٥) اثبت أنه يمكن حساب التكامل المحدود : $\int_a^b f(t)\,dt$ عن طريق حل مسألة القيمة الابتدائية : $y'=f(t);\ \ a\le t\le b,\ \ y(a)=0$.

١-٦) أوجد حل كل من مسائل القيمة الابتدائية التالية:

1- $y' = 3t^2 + \sin(t)$; $y(0) = 2$

2- $y' = 1/(1 + t^2)$; $y(0) = 0$

3- $y' = \exp(-t^2/2)$; $y(0) = 0$

إرشاد: يجب أن نعبِّر عن إجابة هذه المسألة الأخيرة في صورة تكامل معين.

١-٧) نفرض أن لدينا المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى

$$y'(t) + p(t) \cdot y(t) = q(t)$$

اثبت أن الحل العام $y(t)$ يمكن إيجاده عن طريق استخدام تكاملين خاصين:

عرِّف أولا $F(t)$ بالعلاقة:

$$F(t) = \exp(\int p(t)\,dt)$$

ثم عرِّف $y(t)$ كما يلي :

$$y(t) = \frac{1}{F(t)}\left[\int F(t).q(t)\,dt + C\right]$$

إرشاد : اشتق حاصل الضرب $F(t)\,.\,y(t)$.

١-٨) (مسألة تحلل مادة مشعة) إذا كانت $y(t)$ هي كمية المادة المشعة الموجودة عند الزمن t ، فإن $y(t)$ تتناقص ، ومعدل تناقصها يتناسب مع كمية المادة الموجودة غير المتحللة (undecayed material) . وبالتالي فإن مسألة القيمة الابتدائية لتحلل المادة المشعة هي:

$$y' = -ky \quad ; \quad y(0) = y_0$$

أ) اثبت أن حل المسألة هو $y(t) = y_0\ e^{-kt}$.

ب) يعرَّف نصف عمر (half-life) مادة مشعة بأنه الوقت اللازم لتحلل نصف الكمية الابتدائية (half of an initial amount). مثلا نصف عمر المادة ^{14}C هو 5730 سنة.

أوجد صيغة $y(t)$ تعطي كمية المادة ^{14}C الموجودة عند زمن t.

إرشاد : أوجد k بحيث تتحقق العلاقة $y(5730) = 0.5\ y_0$.

ج) تم تحليل قطعة من الخشب ، ووجد أن كمية 14C الموجودة تقدر بنسبة 0.712 من المادة التي كانت موجودة عندما كانت الشجرة حيَّة، كم عمر قطعة الخشب ؟

د) عند لحظة ما كانت كمية المادة المشعة الموجودة تساوي 10 mg. وبعد 23 ثانية وُجد أن كمية المادة المتبقية تساوي 1 mg فقط. كما يساوي نصف عمر هذه المادة ؟

الفصل الثاني

طريقة " أُويْلَرْ "

Euler's Method

من المعلوم أن مسائل القيمة الابتدائية .I.V.P ليست جميعها قابلة للحل بصورة صريحة (explicitly solved) ، وكثيرا ما يكون من المستحيل إيجاد صيغة (formula) للحل. فعلى سبيل المثال لا توجد صيغة أو تعبير في صورة مغلقة (closed form expression) لحل المسألة:

$$y' = f(t,y) = t^3 + y^2 \; ; \qquad y(0) = 0.$$

وبالتالي فيلزمنا في التطبيقات العلمية والهندسية وجود طرق لتقريب الحل. وكلما ازدادت الدقة المطلوبة في الحل ، أي ازداد عدد الأرقام المعنوية (significant digits) المطلوبة في الحل ازداد الجهد المطلوب بذله في إجراء الحسابات وازدادت درجة تعقيد الخوارزميات (algorithms) المستخدمة في الحل.

وتعد طريقة أُويْلَرْ من أبسط الطرق العددية التي توضح المفاهيم المتعلقة بالحلول العددية للمعادلات التفاضلية ، والتي تمهد الطريق لغيرها من الطرق المتقدمة لحل المعادلات التفاضلية ، حيث أن طريقة أُويْلَرْ محدودة الاستخدام نظرا لكبر الخطأ الذي يتراكم مع الاستمرار في تطبيق الطريقة ، وبالتالي تكون دقة الحل العددي الذي نحصل عليه منخفضة. ولكن دراسة هذه الطريقة مهمة حيث أنها توضح بسهولة كيفية تحليل الأخطاء (error analysis) المصاحبة للحل.

نفرض أن $[a , b]$ هي الفترة التي نرغب عليها حل المسألة .I.V.P.

$$y' = f(t,y) , \qquad y(0) = y_0$$

وفي الحل العددي الذي سنحصل عليه بإذن الله سوف لا نحاول إيجاد دالة y قابلة للاشتقاق وتحقق المسألة .I.V.P المعطاة ، وإنما سنقوم بمشيئة الله بتوليد (generation) مجموعة من النقاط $\{(t_k , y_k)\}$ تستخدم كتقريب للحل المطلوب ، أي أن $y(t_k) \approx y_k$ ،

حيث t_k : نقطة عامة في الفترة [a,b].

$y(t_k)$: الحل الصحيح / الدقيق (exact solution) للمسألة .I.V.P عند النقطة t_k.

y_k : الحل العددي / التقريبي (numerical solution/ approximation) للمسألة .I.V.P عند النقطة t_k ، والذي نحصل عليه بتطبيق الطريقة العددية (طريقة أويلر هنا).

وللحصول على مجموعة النقاط التي تحقق المعادلة التفاضلية تقريبا ، نختار أولا محورين للنقاط .. وللسهولة فسنقسم الفترة [a , b] إلى عدد M من الفترات الجزئية (subintervals) المتساوية (انظر شكل ٢-١) ، وبالتالي تكون قيم t المتتابعة (successive values of t) هي :

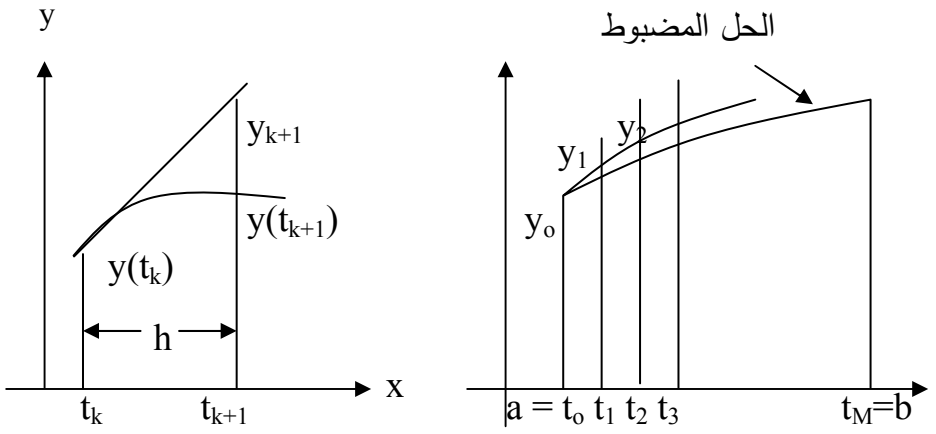
$$t_o , t_1 , t_2 , \dots , t_k , \dots , t_M$$

حيث :

$$t_k = a + hk ; \quad k = 0,1,2,...,M ; \quad h = \frac{b-a}{M} \qquad (1)$$

أي أن h تمثل الزيادة (increment) الثابتة في قيم t_i ، أي طول الفترة الجزئية الثابت ، أو المسافة بين أي قيمتين متتاليتين من قيم t_i ،

وتسمى القيمة h : حجم الخطوة (step size).



شكل ٢-١

والآن لإيجاد حل تقريبي للمسألة :

$$y' = f(t, y) \qquad \forall t \in [t_0, t_M]; \quad y(t_0) = y_0 \qquad (2)$$

هناك أكثر من طريقة.

(i) الطريقة الأولى : نفرض أن $y''(t)$, $y'(t)$, $y(t)$ دوال متصلة ، ونستخدم نظرية تايلور (Taylor's theorem) لفك (expansion) $y(t)$ حول $t = t_o$. نعلم أنه لكل قيمة t توجد قيمة c_1 تقع بين t_o , t بحيث أن

$$y(t) = y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0) + \frac{y''(c_1)(t-t_0)^2}{2} \qquad (3)$$

وبتعويض

$$y'(t_0) = f(t_0, y(t_0) \qquad \& \qquad h = t_1 - t_0$$

في المعادلة (3) ، نحصل على التعبير التالي للقيمة $y(t_1)$:

$$y(t_1) = y(t_0) + hf(t_0, y(t_0)) + y''(c_1)\frac{h^2}{2} \qquad (4)$$

فإذا اخترنا حجم الخطوة h بحيث يكون صغيرا صغرا كافيا فإنه يمكننا إهمال حد الرتبة الثانية الذي يشتمل على h^2 ، وبذلك نحصل على العلاقة:

$$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) \qquad (5)$$

والتي تعرف بتقريب أويلر (Euler's approximation)

ثم نقوم بتكرار هذه العملية وتوليد متتابعة (sequence) من النقاط التي تقرِّب (approximate) منحنى الحل $y = y(t)$.

وعلي ذلك فإن الخطوة العامة في طريقة أويلر تكون :

$$\left.\begin{aligned} t_{k+1} = t_k + h\,, \quad y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k);\\ k = 0,1,2,\ldots, M-1 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

(ii) طريقة أخرى :

نفرض الآن أن قيمة y عند نقطة ما tk ، أي القيمة y(tk) معلومة.

بمكاملة المعادلة التفاضلية :

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \qquad (*)$$

عبر الفترة $(t_k\,,\, t_{k+1})$ نحصل على

$$\int_{y(t_k)}^{y(t_{k+1})} dy = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\, dt\,.$$

$$\Rightarrow \quad y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\, dt \qquad (7)$$

ونظرا لأن قيمة y(t) غير معلومة فرضا للقيم t_k > t ، وبالتالي فإن $f(t, y(t))$ غير معلومة أيضا ، فلذلك يلزم تقريب التكامل السابق. وإحدى طرق التقريب هي أن نفرض أن قيمة f(t,y) ثابتة خلال الفترة $[t_k, t_{k+1}]$ ، وتساوي قيمتها عند بداية الفترة / الخطوة ، أي أن :

$$f(t\,,\, y(t)) = f(t_k\,,\, y(t_k))$$

وبالتالي فإن :

$$\begin{aligned} y(t_{k+1}) &\approx y(t_k) + f(t_k, y(t_k)) \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt \\ &= y(t_k) + hf(t_k, y(t_k)) \end{aligned} \qquad (8)$$

والمعنى الهندسي للفرض السابق والنتيجة التي أدى إليها هو أن نرسم مماسا ميله $f(t_k, y(t_k))$ عند نقطة البداية $(t_k, y(t_k))$ ، ونسقطه (project it) على المستقيم $t = t_{k+1}$ ليعطينا القيمة التقريبية y_{k+1} عند نهاية الخطوة.

ومن الناحية العملية فإن القيمة المضبوطة (exact value) $y(t_k)$ تكون غير معلومة ، ولذلك ففي العلاقة (8) يجب أن نستخدم القيمة التقريبية y_k والتي نكون قد حسبناها وحصلنا عليها من حسابات مماثلة عبر الخطوة السابقة. ولذلك فمن الناحية العملية وباستخدام القيم الفعلية المحسوبة ، فإن المعادلة (8) تصبح :

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k) \qquad (9)$$

ومبتدئين بالشرط الابتدائي (initial condition):

$$y = y_0 \quad : \quad t = t_0 \qquad \text{عندما} \qquad (10)$$

فإن المعادلة (9) يمكن أن تطبَّق تكراريا عبر الخطوات المتتابعة $k=0,1,2,\ldots,M-1$ إلى أن يكتمل حساب جميع التقريبات خلال المدى المطلوب كله : من $t = t_0$ إلى $t = t_M$.

وهذه هي النتيجة نفسها التي وصلنا إليها باستخدام طريقة مفكوك نظرية تايلور.

مثال ٢-١:

باستخدام طريقة أويلر أوجد حلا تقريبيا لمسألة القيمة الابتدائية التالية (حيث R ثابت) :

$$y' = Ry \quad , \quad t \in [0, 5] \quad , \quad y(0) = y_0 \qquad (11)$$

الحل :

بعد اختيار حجم الخطوة h ، نستخدم الصيغة التكرارية

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k , y_k) \quad ; \quad k=0,1,2,\ldots,M-1$$

– والمذكورة سابقا في العلاقة (6) – لحساب قيم y المتتالية ، وأحيانا يطلق على هذه الصيغة التكرارية " معادلة فروق " (difference equation) ، وفي حالتنا تصبح :

$$y_{k+1} = y_k + h.R\ y_k = y_k\ (1 + hR)\ ;\quad k=0,1,2,\ldots,M-1. \qquad (12)$$

وبتعويض قيم k المختلفة نحصل على قيم الحل التالية :

$$y_1 = y_o(1 + hR)$$
$$y_2 = y_1(1 + hR) = y_o(1 + hR)^2$$
$$y_3 = y_2(1 + hR) = y_o(1 + hR)^3$$
$$\vdots$$
$$y_k = y_{k-1}(1 + hR) = y_o(1 + hR)^k$$
$$\vdots$$
$$y_M = y_{M-1}(1 + hR) = y_o(1 + hR)^M$$

في هذه المسألة استطعنا الحصول على صيغة صريحة (explicit form) تعطي نقاط الحل ، أي صيغة عامة صريحة واحدة نستطيع منها حساب جميع نقاط الحل ، وهي :

$$y_k = y_0(1 + hR)^k\ ;\quad k = 0,1,2,\ldots,M\ (t_k=hk) \qquad (13)$$

ولكن في معظم المسائل لا نستطيع الحصول على مثل هذه الصيغة العامة الصريحة ، وإنما يجب أن نحسب كل نقطة جديدة من النقطة السابقة ، فيجب حساب هذه النقطة السابقة أولا. مثلا في المثال الحالي يمكننا حساب قيمة y_4 مباشرة وتساوي

$$y_4 = y_0(1 + hR)^4$$

فيمكن معرفة قيمتها مباشرة دون معرفة قيمة y_3 أولا ، ولكن في معظم المسائل نجد أن العلاقة التي تعطي y_4 تظهر فيها y_3 ، وبالتالي لا يمكن حساب قيمة y_4 إلا بعد التعويض عن قيمة y_3 ، ولذلك فيجب حساب y_3 أولا ، وفي مسائل أخرى نجد أن العلاقة التي تعطي y_4 تحتوي على كل من y_2 , y_3 فيجب حسابهما أولا ، وهكذا. وسيتضح ذلك بإذن الله من أمثلة لاحقة فيما بعد.

مثال ٢–٢ :

نفرض أن لدينا مسألة القيمة الابتدائية (11) المذكورة في المثال السابق (مثال ٢-١) ، حيث $R = 0.1 \ , \ y_o = 1000$. بتطبيق طريقة أويلر أوجد قيمة y عندما $t = 5$ مستخدما خطوة حجمها h يساوي :

(i) 1 (ii) $\frac{1}{12}$ (iii) $\frac{1}{360}$

وقارن الحل التقريبي الناتج في كل حالة مع الحل المضبوط.

الحل :

بتعويض القيم المعطاة تصبح مسألة القيمة الابتدائية هي:

$$y' = 0.1\, y \ , \qquad t \in [0 \ , 5] \ , \qquad y(0) = 1000 \qquad (14)$$

الحل المضبوط لهذه المسألة يمكن الحصول عليه بسهولة :

$$\frac{dy}{y} = 0.1\, dt \ \Rightarrow \ \ln y = 0.1\ t + c \ \Rightarrow$$

$$y = y_0\, e^{0.1\, t} \ \Rightarrow$$

$$y(t) = 1000\, e^{0.1\, t} \qquad (15)$$

$$y(5) = 1000\ e^{0.5} = 1648.72$$

وللحصول على الحل التقريبي نستخدم الصيغة العامة الصريحة (13) التي وصلنا إليها في المثال السابق ، والتي تصبح بعد التعويض عن قيمتي $R \ , \ y_o$:

$$y_k = 1000\ (1 + 0.1\ h)^k \ ; \quad k = 0,1,2,\ldots,M \quad (t_k = hk) \qquad (16)$$

والجدول التالي يعطي قيم الحل التقريبي المطلوبة والمقابلة لقيم h المختلفة المعطاة.

	حجم الخطوة Step size, h	عدد التكريرات Number of iterations, M	الحل التقريبي Approximation to y(5), y_M
(i)	1	5	$1000(1 + 0.1)^5 = 1610.51$
(ii)	$\frac{1}{12}$	60	$1000\left(1 + \frac{0.1}{12}\right)^{60} = 1645.31$

(iii)	$\frac{1}{360}$	1800	$1000\left(1+\frac{0.1}{360}\right)^{1800}=1648.61$

وهذا الجدول يعني أنه في حالة h = 1 نحتاج إلى خمسة تكريرات (M=5) لنمشي خمس خطوات ، كل خطوة حجمها أو طولها h = 1 ، لنصل إلى إيجاد قيمة y_5 (ووجدناها تساوي 1610.51) وهي قيمة تقريبية للقيمة المضبوطة y(5) أي قيمة y عند t = 5.

بينما في حالة $h = \frac{1}{12}$ نحتاج إلى 60 تكرير (M=60) لنمشي 60 خطوة ، كل خطوة طولها $h = \frac{1}{12}$ ، لنصل إلى إيجاد قيمة y_{60} (ووجدناها تساوي 1645.31) ، وهي قيمة تقريبية لقيمة y المضبوطة عند t = 5.

وبالمثل نحتاج إلى 1800 خطوة طول كل منها $h = \frac{1}{360}$ لنصل إلى t = 5 ونحصل على القيمة التقريبية y_{1800} = 1648.61.

إذا لم نستخدم الصيغة العامة الصريحة (16) – والتي أحيانا تسمى الصيغة المغلقة للحل (closed-form solution) – فإن القيم y_5 , y_{60} , y_{1800} تعكس لنا مدى الجهد المطلوب بذله في إجراء الحسابات للوصول إلى الحل التقريبي وعلاقة ذلك بدقة هذا الحل ومدى اختلافه عن الحل المضبوط. فمثلا نحتاج إلى خمسة تكريرات فقط – أي حساب خمس قيم : y_1 , y_2 , ... , y_5 – للوصول إلى القيمة التقريبية المطلوبة ، ولكننا نجد أن الدقة في هذا الحل تكون منخفضة (قارن الحل العددي / التقريبي 1610.51 مع الحل المضبوط 1648.72) ، بينما نحتاج إلى 1800 تكرير – أي حساب 1800 قيمة : y_1 , y_2 , ... , y_{1800} – للوصول إلى قيمة تقريبية (1648.61) أدق من السابقة (1610.51) حيث أنها أقرب إلى الحل المضبوط (1648.72) ، ولكنها لا زالت غير مضبوطة (الدقة : نحو خمسة أرقام فقط في الجواب).

الوصف الهندسي لطريقة أويلر :
Geometric Description of Euler's Method

شكل ٢-٢

تقريبات أويلر

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k , y_k)$$

إذا بدأنا عند النقطة (t_0 , y_0) وحسبنا قيمة الميل $m_0 = f(t_0 , y_0)$ وتحركنا أفقيا بقدر h ورأسيا بقدر $hf(t_0 , y_0)$ فإننا نكون قد تحركنا فعليا على طول الخط المماس (tangent line) للمنحنى y(t) لننتهي عند النقطة (t_1 , y_1) (انظر شكل ٢-٢). ولاحظ أن (t_1 , y_1) ليست على منحنى الحل المطلوب ! ، ولكن هذا هو التقريب الذي نقوم بحسابه ونستطيع الوصول إليه في هذه الطريقة. ومن ثم فعلينا أن نستخدم الآن (t_1 , y_1) كما لو كانت هي النقطة المضبوطة / الصحيحة (correct) ونتقدم للخطوة التالية بحساب الميل $m_1 = f(t_1 , y_1)$ واستخدامه للحصول على الإزاحة الرأسية التالية $hf(t_1 , y_1)$ لتحديد موضع (t_2 , y_2) ، وهكذا.

العلاقة بين حجم الخطوة والخطأ

Relation between Step Size and Error

الطرق العددية التي نناقشها في هذا الكتاب لتقريب حل مسائل القيمة الابتدائية يطلق عليها " طرق الفروق " (difference methods) ، أو "طرق المتغيرات المتقطعة / المنفصلة" (discrete variable methods). وفي هذه الطرق نقوم بتقريب الحل عند مجموعة من النقاط المنفصلة / المتباعدة (set of discrete points) تسمى شبكة نقاط (grid/mesh of points) ، ويطلق على الطريقة العددية إنها طريقة بسيطة أحادية الخطوة (elementary single-step method) إذا كانت صيغتها :

$$y_{k+1} = y_k + h\Phi(t_k, y_k)$$

حيث Φ دالة ما تسمى دالة الزيادة (increment function).

أنواع الخطأ Types of Errors

عندما نستخدم أي طريقة من طرق المتغيرات المتقطعة لإيجاد حل تقريبي لمسألة قيمة ابتدائية فإنه يكون هناك مصدران رئيسيان للخطأ : خطأ اقتطاع وخطأ تقريب. وفيما يلي نذكر معناهما أولا ، ثم نعطي العلاقات الرياضية التي تتعلق بهما.

تعريفات :

خطأ الاقتطاع Truncation / Discretization Error

هو الخطأ الناتج عن تطبيق الطريقة العددية ، وذلك لأن الحل المضبوط يحتاج عادة إلى عدد لا نهائي من العمليات ، بينما الطريقة العددية تطبق عددا محدودا فقط من الخطوات.

خطأ الاقتطاع المحلي local truncation / discretization error

هو خطأ الاقتطاع الناتج عن تطبيق الطريقة العددية في خطوة واحدة فقط.

خطأ التقريب Rounding / Round-off Error

هو الخطأ الناتج عن الجهاز المستخدم لإجراء الحسابات ، وذلك لأن جميع العمليات تُجرى وتنفذ بدقة محدودة (finite precision) بسبب الذاكرة المحدودة (finite memory) للجهاز [حيث عدد الأرقام التي تحفظ في الذاكرة – والتي تنتج عن أي نتيجة محسوبة – يكون ثابتا (fixed) ومحدودا ، مثلا ٧–١٢ رقما معنويا].

نفرض أن $\{(t_k,y_k)\}$; $k = 0,1,2,\ldots,M$

هي مجموعة التقريبات المتقطعة / المنفصلة ،

وأن $y(t)$ = y هو الحل الوحيد (unique solution) لمسألة القيمة الابتدائية.

أي أن $y(t_k)$: هو الحل المضبوط عند النقطة t_k .

y_k : هو الحل التقريبي الناتج من الطريقة العددية (طريقة متغيرات متقطعة discrete variable method)

يعرَّف **خطأ الاقتطاع الشامل global discretization error** بالعلاقة :

$$e_k = y(t_k) - y_k \quad ; \quad k=1,2,3,\ldots,M \qquad (17)$$

أي أنه الفارق بين الحل الوحيد والحل الناتج من طريقة المتغيرات المتقطعة.

ويعرَّف **خطأ الاقتطاع المحلي local discretization error** بالعلاقة :

$$\in_{k+1} = y(t_{k+1}) - y_k - h\Phi(t_k , y_k) \quad ; \quad k=0,1,2,\ldots,M-1 \qquad (18)$$

أي أنه الخطأ الذي ارتُكب في الخطوة المفردة (single step) من t_k إلى t_{k+1}.

عند استنتاجنا للمعادلة (6) التي تلخص طريقة أويلر كان الحد المهمل (neglected term) في كل خطوة هو : $y''(c_k).\frac{h^2}{2}$. فإن كان هذا هو الخطأ الوحيد في كل خطوة فإن الخطأ المتراكم (accumulated error) في نهاية الفترة [a,b] بعد إجراء عدد M من الخطوات يصبح :

$$\sum_{k=1}^{M} y''(c_k).\frac{h^2}{2} = M.y''(c).\frac{h^2}{2} = \frac{hM}{2}.y''(c).h$$

$$= \frac{(b-a).y''(c)}{2}.h = O(h).$$

وقد يكون هناك أخطاء أكثر ، ولكن هذا التقدير للخطأ المتراكم هو الغالب (predominant). ويمكن الرجوع إلى دراسة مفصلة لهذا الموضوع في المرجع [47] . وعموما سنرجع مرة أخرى في هذا الفصل إلى مناقشة بعض التفاصيل في موضوع الأخطاء في طريقة أويلر.

نظرية ٢-١ (دقة طريقة أويلر) Precision of Euler's Method

نفرض أن $y(t)$ هي حل مسألة القيمة الابتدائية IVP المذكورة في (2). إذا كانت

$$y(t) \in C^2[t_0, b]$$

وكانت $\{(t_k, y_k)\}$; $k = 0,1,2,...,M$

هي متتابعة (sequence) التقريبات الناتجة من تطبيق طريقة أويلر فإن :

$$\left.\begin{aligned} |e_k| &\equiv |y(t_k) - y_k| = O(h), \\ |\in_{k+1}| &\equiv |y(t_{k+1}) - y_k - hf(t_k, y_k)| = O(h^2) \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

والخطأ عند نهاية الفترة يطلق عليه " **الخطأ الشامل النهائي** " **(FGE)** **(Final Global Error)** ، ويعطى بالعلاقة :

$$E(y(b),h) = |y(b) - y_M| = O(h) \qquad (20)$$

ملاحظة : يستخدم الخطأ الشامل النهائي $E(y(b)\ ,\ h)$ لدراسة تأثير تغير حجم الخطوة على الخطأ الناتج. فيمكن استخدام الخطأ الشامل النهائي لإعطاء فكرة عن مدى الجهد المطلوب بذله في إجراء الحسابات (computing effort) للحصول على تقريب دقيق.

والمثالان التاليان يوضحان المفاهيم المعطاة في النظرية السابقة. إذا فرضنا أن التقريبات المتتابعة قد تم حسابها باستخدام حجم الخطوة h ثم مرة أخرى باستخدام حجم الخطوة $\frac{h}{2}$ ، فسينتج لنا في الحالة الأولى (حالة حجم الخطوة الأكبر) :

$$E(y(b),h) \approx Ch \qquad (21)$$

بينما في الحالة الثانية نحصل على :

$$E\left(y(b),\frac{h}{2}\right) \approx C.\frac{h}{2} = \frac{1}{2}E(y(b),h) \qquad (22)$$

أي أن فكرة النظرية السابقة هي أنه إذا تم تقليل حجم الخطوة في طريقة أويلر إلى نصف قيمتها فنتوقع أن يقل الخطأ الشامل النهائي الكلي (overall FGE) إلى نصف قيمته.

مثال ٢-٣:

أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية التالية :

$$y' = \frac{t-y}{2} \quad ; \quad t \in [0,3] \quad , \quad y(0) = 1 \qquad (23)$$

باستخدام طريقة أويلر وبأخذ قيمة حجم الخطوة :

(i) $h = 1$ (ii) $h = \frac{1}{2}$ (iii) $h = \frac{1}{4}$ (iv) $h = \frac{1}{8}$.

قارن بين الحلول الناتجة في هذه الحالات المختلفة.

الحل :

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k) \quad ; \quad k = 0,1,...,M-1,$$

$$= y_k + h.\frac{t_k - y_k}{2} \quad ; \quad k = 0,1,...,M-1.$$

مثلا عندما $h = \frac{1}{4}$:

$$y_{k+1} = y_k + 0.25\,\frac{t_k - y_k}{2}$$

$$k = 0 \Rightarrow \quad y_1 = y_0 + 0.25\,\frac{t_o - y_o}{2}$$

$$= 1.0 + 0.25\frac{0.0-1.0}{2} = 0.875,$$

$$k = 1 \Rightarrow \quad y_2 = y_1 + 0.25\,\frac{t_1 - y_1}{2}$$

$$= 0.875 + 0.25\,\frac{0.25-0.875}{2} = 0.796875,$$

$$\vdots$$

$$k = 11 \Rightarrow \quad y_{12} \equiv y(3) = y_{11} + 0.25\,\frac{t_{11} - y_{11}}{2}$$

$$= 1.440573 + 0.25\,.\,\frac{2.75-1.440573}{2} = 1.604252$$

وبالمثل يمكن إجراء باقي الحسابات بالنسبة لقيم h الأخرى ، والجدول التالي يلخص النتائج للحالات الأربع المختلفة $\left(h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$ عند قيم مختارة للنقاط t_k ، ويقارن هذه النتائج مع القيم المضبوطة للحل عند هذه النقاط ، حيث الحل المضبوط هو :

$$y(t) = 3\,e^{-\frac{t}{2}} - 2 + t$$

t_k	y_k				القيم المضبوطة Exact $y(t_k)$
	$h = 1$	$h = \frac{1}{2}$	$h = \frac{1}{4}$	$h = \frac{1}{8}$	
0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.125				0.9375	0.943239
0.25			0.875	0.886719	0.897491
0.375				0.846924	0.862087
0.50		0.75	0.796875	0.817429	0.836402
0.75			0.759766	0.786802	0.811868
1.00	0.5	0.6875	0.758545	0.790158	0.819592

1.50		0.765625	0.846386	0.882855	0.917100
2.00	0.75	0.949219	1.030827	1.068222	1.103638
2.50		1.211914	1.289227	1.325176	1.359514
3.00	1.375	1.533936	1.604252	1.637429	1.669390

والشكل التالي يقارن منحنيات حل المسألة بطريقة أويلر في الحالات $h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ مع منحنى الحل المضبوط $y(t) = 3e^{-\frac{t}{2}} - 2 + t$.

شكل ٢-٣

مثال ٢-٤:

قارن بين قيم الخطأ الشامل النهائي FGE الناتجة عن تطبيق طريقة أويلر لحل مسألة القيمة الابتدائية (23) المذكورة في المثال السابق :

$$y' = \frac{t-y}{2} \quad ; \quad t \in [0,3] \quad , \quad y(0) = 1$$

باستخدام القيم التالية لحجم الخطوة h :

$$h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{64}$$

الحل :

$$FGE \equiv E(y(b) , h) = |y(b) - y_M| = O(h) \approx Ch$$
$$FGE \equiv E(y(3) , h) = |y(3) - y_M|$$

مثلا عندما $h = \frac{1}{4}$:

$$FGE \equiv E(y(3) , 0.25) = |y(3) - y_{12}|$$
$$= |1.669390 - 1.604252| = 0.065138$$

والجدول التالي يعطي قيم الخطأ الشامل النهائي المقابلة لقيم حجم الخطوة المعطاة

حجم الخطوة Step size, h	عدد الخطوات Number of steps, M	الحل التقريبي Approximation to y(3), y_M	الخطأ الشامل النهائي F.G.E Error at t=3 $y(3) - y_M$	$O(h) \approx Ch$ where C=0.256
1	3	1.375	0.294390	0.256

$\frac{1}{2}$	6	1.533936	0.135454	0.128
$\frac{1}{4}$	12	1.604252	0.065138	0.064
$\frac{1}{8}$	24	1.637429	0.031961	0.032
$\frac{1}{16}$	48	1.653557	0.015833	0.016
$\frac{1}{32}$	96	1.661510	0.007880	0.008
$\frac{1}{64}$	192	1.665459	0.003931	0.004

ومن الجدول يتبين لنا أن الخطأ في القيمة التقريبية المحسوبة لقيمة $y(3)$ يقل تقريبا إلى نصف قيمته عندما يقل حجم الخطوة إلى نصف قيمته. وبالنسبة لقيم حجم الخطوة h الصغيرة يسهل أن نرى النتيجة التي تعطيها النظرية السابقة (نظرية دقة طريقة أويلر) ، وهي

$$E(y(3) , h) = y(3) – y_M = O(h) \approx Ch$$

حيث

$$C = 0.256 .$$

الأخطاء وانتشارها في طريقة أويلر

(Errors and their Propagation in Euler's Method)

ذكرنا سابقا أن المصدرين الأساسيين للخطأ في أي طريقة من طرق المتغيرات المتقطعة لإيجاد حل تقريبي لمسألة قيمة ابتدائية هما خطأ الاقتطاع وخطأ التقريب. وفي الجزء المتبقي من هذا الفصل نناقش ببعض التفصيل الأخطاء الناتجة من تطبيق طريقة أويلر وانتشار هذه الأخطاء أو تراكمها (accumulation) عند الانتقال من خطوة إلى أخرى أثناء تطبيق هذه الطريقة.

إذا فرضنا أن :

$y(t_k)$: الحل المضبوط (exact solution) عند النقطة t_k.

y_k : الحل التقريبي الناتج من الطريقة العددية [القيمة المضبوطة التي كنا سنحصل عليها من تطبيق الخوارزمية العددية – خوارزمية أويلر – بدون أخطاء تقريب (rounding errors)].

$\bar{y}_k$: القيمة المحسوبة فعلا (actually calculated value) (أي مع وجود خطأ التقريب).

فإن :

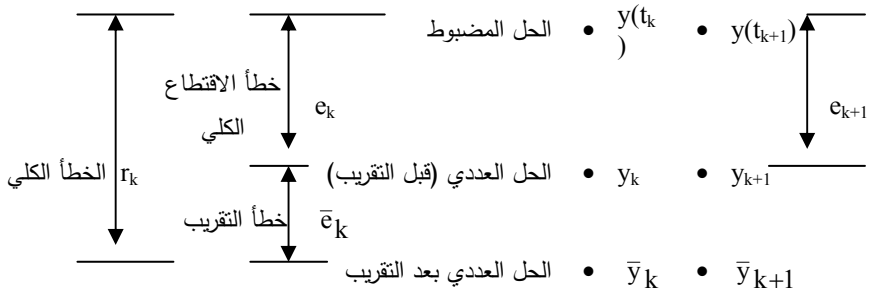
خطأ الاقتطاع الكلي (total truncation error): $e_k = y(t_k) - y_k$

خطأ التقريب (rounding error): $\bar{e}_k = y_k - \bar{y}_k$

الخطأ الكلي (total error): $r_k = y(t_k) - \bar{y}_k = e_k + \bar{e}_k$

خطأ الاقتطاع المحلي (local truncation error) ℓte : $E_{k+1} - e_k$





$$r_k = y(t_k) - \bar{y}_k = (y(t_k) - y_k) + (y_k - \bar{y}_k)$$

$$|r_k| = |y(t_k) - \bar{y}_k|$$
$$\leq |y(t_k) - y_k| + |y_k - \bar{y}_k|$$
$$= |e_k| + |\bar{e}_k|$$

| total error | ≤ | total truncation error | + | rounding error |

أي أن | الخطأ الكلي | ≤ | خطأ الاقتطاع الكلي | + | خطأ التقريب |

ملاحظة :

بالنسبة لقيم حجم الخطوة h الصغيرة فإن خطأ الاقتطاع المحلي (ℓte) الناتج عن استخدام صيغة متسلسلة تايلور المقتطعة (truncated Taylor series) يساوي تقريبا قيمة أول حد تالي (next term) في المتسلسلة ، فمثلا:

(i) في قانون أويلر (والذي يعد قانون تايلور حيث n = 1) :

$$y_{k+1} \approx y_k + h \cdot f(t_k , y_k)$$

فإن خطأ الاقتطاع المحلي يساوي

$$\ell te \approx \frac{h^2}{2!} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}$$

i.e., $\ell te \ \alpha \ h^2$

i.e., $\ell te = O(h^2)$ (24)

وللتقدم من t_o إلى t_M فإن طريقة أويلر تكرر عدد M من المرات ، وحيث أن $M\alpha\frac{1}{h}$ ، لذلك فإنه :

لقيم h الصغيرة فإن خطأ الاقتطاع الكلي عبر M خطوة يكون متناسبا مع $h^2 . \frac{1}{h} = h$

أي أن خطأ الاقتطاع الكلي :

total truncation error = O(h) (25)

وبعد قليل سنعطى برهانا رياضيا كاملا لهذه النتيجة.

(ii) عموما إذا احتفظنا بجميع الحدود حتى الحد الذي يحتوي على hM في متسلسلة تايلور ، فإن :

$$|\ell te| = |e_{k+1} - e_k| \le \frac{h^{M+1}}{(M+1)!} \cdot Q ,$$

حيث

$$Q \ge \left| f^{(M)}(\xi, y(\xi)) \right|_{max} , \ t_k \le \xi \le t_{k+1}$$

تراكم / انتشار أخطاء الاقتطاع المحلية في طريقة أويلر

Accumulation/Propagation of ℓ.t.errors in Euler's Method

مأخوذة (lemma)

حل المتباينة (inequality) :

$$\left.\begin{array}{l} |e_{k+1}| \le A.|e_k| + B \ ... \ [k \ge 0, \\ \quad A > 0, \ A \ne 1, \ B \ge 0, \\ \quad \text{وكل من } A,B \text{ لا يعتمد على } k \ ] \end{array}\right\} \qquad (26)$$

هو :

$$|e_k| \le A^k.|e_0| + \left(\frac{A^k - 1}{A - 1}\right).B ; \qquad k > 0 \qquad (27)$$

البرهان (بالاستنتاج الرياضي math. induction) :

عندما k=1 فإن العلاقة (27) تتطابق مع العلاقة (26) [بوضع k=0 في العلاقة (26)]

والآن نفرض أن العلاقة (27) صحيحة (true) لقيمة عامة k ، ونحاول إثبات أنها ستكون صحيحة أيضا عند k+1 :

$$|e_{k+1}| \le A \ |e_k| + B \qquad \{by\ (26)\}$$

$$\le A \left[A^k.|e_0| + \left(\frac{A^k - 1}{A - 1}\right).B \right] + B$$

$$= A^{k+1}|e_0| + B\left(1 + \frac{A^{k+1} - A}{A-1}\right)$$

$$= A^{k+1}.|e_0| + \frac{A^{k+1}-1}{A-1}.B$$

أي أن العلاقة (27) صحيحة أيضا عند k+1 ، وهو المطلوب إثباته. □

والآن نفرض أن لدينا مسألة القيمة الابتدائية IVP :

$$y' \equiv \frac{dy}{dt} = f(t,y) \; ; \qquad y(t_0) = y_0$$

ونفرض أن كلا من الدوال $f \; , \frac{\partial f}{\partial t} \; , \frac{\partial f}{\partial y}$ دالة متصلة (continuous) ومحدودة (bounded) في المنطقة :

$$t \in [a,b] \; , \qquad y \in (-\infty \; , \infty) \; , \qquad a < t_0 < t_n < b.$$

فيجب أن يتواجد ∃ ثابتان $Q \; , L$ بحيث أن :

$$|y''(t)| \equiv \left|\frac{\partial f(t,y)}{\partial t} + \frac{\partial f(t,y)}{\partial y}.f(t,y)\right| \le Q$$

$$\& \; \frac{\left|f(t,y^*) - f(t,y)\right|}{|y^* - y|} = \left|\frac{\partial f(t,\alpha)}{\partial y}\right|$$

(بنظرية القيمة المتوسطة في التفاضل by diff. mean value theorem)

$$\text{i.e.,} \; \left|f(t,y^*) - f(t,y)\right| = \left|\frac{\partial f(t,\alpha)}{\partial y}\right| . |y^* - y| \le L . |y^* - y|$$

حيث

$$\alpha \in (y \; , y^*)$$

نظرية ٢-٢ :

نفرض أن لدينا مسألة القيمة الابتدائية IVP :

$$y' \equiv \frac{dy}{dt} = f(t, y(t)); \qquad y(t_0) = y_0$$

إذا كانت الدالة f تحقق الشرطين :

(i) $\left|\frac{df(t,y)}{dt}\right| = |f'(t,y)| \equiv |y''(t)| \le Q$

(ii) $\left|\frac{\partial f(t,y)}{\partial t}\right| \le L$

$[\Rightarrow |f(t, y^*) - f(t, y)| \le L |y^* - y|$

[وهذا يسمى شرط ليبشتز]

فإن خطأ الاقتطاع e_k الناتج عن تطبيق طريقة أويلر لحل المسألة عدديا يحقق المتباينة

$$\left.\begin{aligned} |e_k| &\le \frac{Qh}{2L}\left((1+hL)^k - 1\right) \\ &\le \frac{Qh}{2L}\left(e^{khL} - 1\right) \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

حيث h يمثل حجم الخطوة.

نتيجة (Corollary) :

$$|e_M| \le \frac{Qh}{2L} \cdot e^{dL} \qquad (29)$$

حيث $d = t_M - t_0$

برهان نظرية ٢-٢ :

$$e_k = y(t_k) - y_k$$
$$e_o = y(t_o) - y_o = 0$$
$$\Delta e_k \equiv e_{k+1} - e_k$$
$$= y(t_{k+1}) - y_{k+1} - [y(t_k) - y_k]$$
$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$$
$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + hf(t_k, y(t_k)) + \frac{h^2}{2!}f'(\xi, y(\xi)),$$
$$t_k < \xi < t_{k+1}.$$
$$\Rightarrow \Delta e_k = h[f(t_k, y(t_k)) - f(t_k, y_k)] + \frac{h^2}{2}f'(\xi, y(\xi)).$$
$$\Rightarrow |\Delta e_k| \le hL|y(t_k) - y_k| + \frac{h^2}{2}Q.$$
$$\text{i.e., } |\Delta e_k - e_k| \le hL|e_k| + \frac{Q}{2}h^2$$

ولكن

$$\begin{aligned}|e_{k+1}| &= |e_{k+1} - e_k + e_k| \\ &\le |e_{k+1} - e_k| + |e_k| \\ &\le (1 + hL).|e_k| + \frac{Q}{2}h^2 \; ; \\ &= A.|e_k| + B \quad ; \quad k \ge 0\end{aligned}$$

حيث $A = 1 + hL \quad , \quad B = \frac{Qh^2}{2}$

وبتطبيق المأخوذة السابقة نستنتج أن (لاحظ أن $e_0 = 0$) :

$$\begin{aligned}|\, e_k \,| &\le \frac{(1+hL)^k - 1}{(1+hL) - 1} \cdot \frac{Q}{2}h^2 \\ &= \frac{Qh}{2L}\left[(1 + hL)^k - 1\right]\end{aligned}$$

ولكن $1 + hL < e^{hL}$

(بمفكوك تايلور للدالة e^{hL})

$$\Rightarrow |\, e_k \,| \le \frac{Qh}{2L}\left(e^{khL} - 1\right)$$

وهذا هو المطلوب إثباته.

برهان نتيجة نظرية ٢-٢ :

$$|\, e_k \,| \le \frac{Qh}{2L}\left(e^{khL} - 1\right)$$

$$\Rightarrow |\, e_M \,| \le \frac{Qh}{2L}\left(e^{MhL} - 1\right)$$

$$Mh = t_M - t_0 = d$$

$$\Rightarrow |\, e_M \,| \le \frac{Qh}{2L}\left(e^{dL} - 1\right) \le \frac{Qh}{2L}\, e^{dL}.$$

ملاحظة :

الخطأ $|e_M|$ يؤول إلى الصفر عندما تؤول h إلى الصفر لأن :

$$\lim_{h \to 0} |e_M| \le \lim_{h \to 0} \frac{Qh}{2L} e^{dL} = 0$$

وهذا صحيح رغم أن $M \to \infty$ عندما $h \to 0$.

تعريف :

يقال لإجراء عددي (numerical procedure) إنه متقارب (convergent) إذا كان

$$\lim_{h \to 0} \left| e_k \right| = 0 \quad , \qquad \forall\, 0 \le k \le M \tag{30}$$

وبالتالي فإن طريقة أويلر متقاربة ، وذات خطأ اقتطاع كلي من الرتبة h.

ملاحظة :

في طريقة أويلر يكون خطأ الاقتطاع المحلي ℓte من الرتبة h^2 :

$$\left| e_{k+1} - e_k \right| \cong \frac{h^2}{2} \left| f'(\xi, y(\xi)) \right| ; \qquad \xi \in (t_k, t_{k+1})$$

$$\ell te = O\left(h^2 \right).$$

بينما خطأ الاقتطاع الكلي يكون من الرتبة h

$$\text{total truncation error} = O(h) .$$

مثال ٢-٥:

نفرض أن لدينا مسألة القيمة الابتدائية IVP :

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = x + y ; \qquad y(x_0) = y_0 \tag{31}$$

حيث الحل المضبوط هو:

$$y(x) = e^{-x_0}(1 + x_0 + y_0)e^{x} - (x+1) \tag{32}$$

ونفرض أننا سنقوم بحل المسألة بطريقة أويلر في الفترة [0 , 0.3] باستخدام حجم الخطوة $h = 0.1$ ، وأن $x_0 = 0 , y_0$ 1 . طبق نظرية ٢-٢ لحساب قيم الحد الأعلى (upper bound) لخطأ الاقتطاع عند النقاط x_k.

الحل :

بتعويض $x_0 = 0 , y_0 = 0$ في العلاقة (32) نحصل على صيغة الحل المضبوط :

$$y(x) = e^x - x - 1 \qquad (32)'$$

ولحساب قيم الحد الأعلى لخطأ الاقتطاع عند النقاط المختلفة يمكننا استخدام إحدى المتباينتين المذكورتين في نظرية ٢-٢ وهما:

$$|e_k| \le \frac{Qh}{2L}\left((1+hL)^k - 1\right) \quad \text{(i)}$$

$$|e_k| \le \frac{Qh}{2L}\left(e^{khL} - 1\right) \quad \text{(ii)}$$

وفيما يلي سنستخدم العلاقة (i).

Q : يمكن أن تؤخذ على أنها الحد الأعلى لقيمة $|f'(x,y)|$ على الفترة $[x_0, x_k] = [0, x_k]$

L : يمكن أن تؤخذ على أنها الحد الأعلى لقيمة $\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|$.

i.e., $\quad Q = |f'(x,y)|_{max}$, $\quad L = \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{max}$

$$f(x,y) = x + y \quad \Rightarrow$$

$$f'(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{dy}{dx} = 1 + 1.(x+y)$$

$$= 1 + x + y = e^x \qquad \{\text{انظر العلاقة } (32)'\}$$

$$Q = \left|e^x\right|_{max} = e^{x_k}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 \quad \Rightarrow \quad L = |1|_{max} = 1$$

وبالتعويض في المتباينة (i) نحصل على :

$$|e_k| \le \frac{0.1\, e^{x_k}}{2}\left((1+0.1)^k - 1\right)$$

ومن هذه الصيغة نحصل على القيم التالية للحد الأعلى لخطأ الاقتطاع :

k	0	1	2	3
x_k	0.0	0.1	0.2	0.3
$\|e_k\|_{max}$	0.0	0.0055	0.0128	0.0222

* * *

وفي نهاية هذا الفصل يمكننا تلخيص خطوات طريقة أويلر لإيجاد الحل التقريبي لمسألة القيمة الابتدائية :

$$y' = f(t,y); \qquad t \in [a,b], \qquad y(a) = y_0$$

باستخدام العلاقة

$$y_{k+1} = y_k + h.f(t_k, y_k); \qquad k = 0,1,2,...,M-1$$

في الخوارزمية التالية :

خوارزمية طريقة أويلر **Euler's Method Algorithm**

```
        INPUT A, B, Y(0)                    {Endpoints and initial value}
        INPUT  M                            {Number of steps}
        H := [B - A]/M                      {Compute the step size}
        T(0) := A                           {initialize the veriable}

FOR     K=0  TO  M-1  DO
        Y(K+1) := Y(K) + H*F(T(K),Y(K))     {Euler solution y_{k+1}}
        T(K+1) := A + H*[K+1]               {Compute the mesh point t_{k+1}}

FOR     K=0  TO  M  DO                      {Output}
        PRINT  T(K), Y(K)
```

تمرينات رقم ٢

٢-١)نفرض أن لدينا مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = x - 0.1\,y^2 ; \qquad y(0) = 1$$

استخدم طريقة أويلر متخذا حجم الخطوة $h = 0.1$ لإيجاد قيمة y عند $x = 0.3$.

٢-٢)طبق طريقة أويلر على مسألة القيمة الابتدائية :

$$y' = x^2 - y^2 \quad ; \quad y(-1) = 1$$

لإيجاد قيمة y عند $x = 1$ ، متخذا حجم الخطوة $h = 0.5$.

٢-٣)نفرض أن لدينا مسألة القيمة الابتدائية :

$$y' = x\,y^{\frac{1}{3}} \quad ; \quad y(1) = 1$$

احسب قيمة y عند $x = 1.2$ باستخدام طريقة أويلر وبأخذ حجم الخطوة $h = 0.1$. ثم احسب قيمة خطأ الاقتطاع في النتيجة التي حصلت عليها.

٢-٤)نفرض أننا عند حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(x,y); \qquad y(x_0) = y_0$$

في الفترة $x \in [x_o , x_M]$ بطريقة أويلر حصلنا على النتائج التالية لقيمة y عند x_M باستخدام قيمتين مختلفتين لحجم الخطوة h :

h	0.05	0.1
y	1.22726	1.22595

احسب قيمة أفضل (أي تقريبا أدق) لـ y عند x_M $= x$ باستخدام الاستيفاء extrapolation (طريقة ريتشاردسون للاقتراب المؤجَّل من النهاية Richardson deferred approach to the limit)[١]

[إرشاد : الخطأ يتناسب طرديا مع قيمة حجم الخطوة h].

---

[١]انظر مثلا صفحة ٣٥٣ من كتاب التحليل العددي للمؤلف ، دار القلم ، الكويت.

٢-٥)نفرض أن لدينا المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = y$ مع الشرط الابتدائي $y(0) = 1$.

أ) كامِل هذه المعادلة عدديا إلى القيمة $x = 0.4$ باستخدام طريقة أويلر ، وبأخذ حجم الخطوة :

(i) $h = 0.2$ (ii) $h = 0.1$

ب) أوجد قيمة y عند $x = 0.4$ باستخدام الاستيفاء (استيفاء ريتشاردسون). (لاحظ أن الخطأ يتناسب طرديا مع حجم الخطوة). قارن النتيجة التي حصلت عليها مع الحل المضبوط. كم النسبة بين الخطأ في النتيجة التي حصلت عليها في (ii) سابقا [في الجزء (أ)] والخطأ في النتيجة التي حصلت عليها هنا في ب).

ج) كم عدد الخطوات التي نحتاج إليها تقريبا لنحصل بدون استيفاء على الدقة (accuracy) / النتيجة نفسها التي حصلنا عليها في ب) ؟

٢-٦)نفرض أن لدينا مسألة القيمة الابتدائية :

$$y' = -xy^2 \quad , \quad y(0) = 2$$

أ) طبق طريقة أويلر لحساب قيم الحل حتى $x = 1$ باستخدام حجم الخطوة $h = 0.1$.

ب) ماذا يُقصد بتقارب (convergence) طريقة عددية ؟ وضح هذا المفهوم بالنسبة لطريقة أويلر عن طريق حساب قيمة y عند $x = 1$ باستخدام قيم مختلفة لحجم الخطوة h (مثلا : $h = 0.1, 0.2, 0.25$) ثم مقارنة النتائج مع الحل المضبوط.

في كل من المسائل التالية من ٢-٧ إلى ٢-١١ استخدم طريقة أويلر لإيجاد الحلول التقريبية لمسائل القيمة الابتدائية المعطاة باتباع الخطوات التالية :

أ) احسب قيم $y_1, y_2, \ldots, y_M$ لكل من الحالات الثلاث

(i) $h = 0.2 , M = 1$ (ii) $h = 0.1 , M = 0.2$ (iii) $h = 0.05 , M = 4$

ب) قارن الحل المضبوط $y(0.2)$ مع الحلول التقريبية الثلاثة التي حصلت عليها في (أ). هل لاحظت أن قيم الخطأ الشامل النهائي في القيم التي حصلت عليها في (أ) تتفق مع النتيجة المتوقعة عندما تقل قيمة حجم الخطوة h إلى نصف قيمتها ؟

ج) استخدم حاسوبا لإجراء الحسابات على الفترة الأكبر $[a , b]$ المعطاة.

٢-٧) أ) أوجد حل المسالة IVP :

$$y' = t^2 - y , \quad t \in [0 , 0.2] , \quad y(0) = 1$$

ب) قارن مع الحل المضبوط : $y(t) = -e^{-t} + t^2 - 2t + 2$

ج) أعد حل المسألة المعطاة في أ) في الفترة

$$[a , b] = [0 , 2] ; \quad h = 0.2 , 0.1 , 0.05.$$

٢-٨) أ) أوجد حل المسألة

$$y' = 3y + 3t ; \quad t \in [0 , 0.2] , \quad y(0) = 1.$$

ب) قارن مع الحل المضبوط

$$y(t) = \frac{4}{3}e^{3t} - t - \frac{1}{3}$$

ج) أعد حل المسألة في الفترة

$$[a , b] = [0 , 2] ; \quad h = 0.2 , 0.1 , 0.05.$$

٢-٩) أ) أوجد حل المسألة

$$y' = -ty , \quad t \in [0 , 0.2] , \quad y(0) = 1.$$

ب) قارن مع الحل المضبوط : $y = e^{-t^2/2}$

ج) أعد حل المسألة في الفترة

$$[a , b] = [0 , 2] ; \quad h = 0.2 , 0.1 , 0.05.$$

٢-١٠) أ) أوجد حل المسألة

$$y' = e^{-2t} - 2y ; \quad t \in [0,0.2], \quad y(0) = \frac{1}{10}$$

ب) قارن مع الحل المضبوط

$$y(t) = \frac{1}{10} e^{-2t} + t \cdot e^{-2t}$$

ج) أعد حل المسألة في الفترة :

$$[a , b] = [0 , 2] ; \qquad h = 0.2 , 0.1 , 0.05.$$

٢-١١) أ) أوجد حل المسألة

$$y' = 2ty^2 ; \qquad t \in [0 , 0.2] , \quad y(0) = 1.$$

ب) قارن مع الحل المضبوط

$$y(t) = 1/(1 - t^2) .$$

ج) أعد حل المسألة في الفترة

$$[a , b] = [0 , 2] ; \qquad h = 0.1 , 0.05 , 0.025.$$

لاحظ أن طريقة أويلر ستؤدي إلى إيجاد قيمة تقريبية لـ $y(1)$ رغم أن منحنى الحل غير معرَّف عند $t = 1$.

٢-١٢) نفرض أن لدينا مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = 0.12\, y ; \qquad t \in [0 , 5] , \qquad y(0) = 1000.$$

أ) استخدم العلاقة (13) لإيجاد تقريب أويلر لقيمة $y(5)$ متخذا قيم حجم الخطوة :

$$h = 1, \ \frac{1}{12}, \ \frac{1}{360}$$

ب) ما هي القيمة النهائية (limit) في الجزء (أ) عندما تؤول h إلى الصفر؟

٢-١٣) ينمو تعداد (population) نوعية من الكائنات بمعدل يتناسب مع التعداد الحالي ، ويتبع مسألة القيمة الابتدائية IVP:

$$y' = 0.02\, y ; \qquad t \in [0 , 5] , \qquad y(0) = 5000.$$

(أ) طبق الصيغة (13) لإيجاد قيمة تقريبية لقيمة $y(5)$ بطريقة أويلر وباستخدام حجم الخطوة $h = 1, \ \frac{1}{12}, \ \frac{1}{360}$

(ب) ما هي القيمة النهائية (limit) في الجزء (أ) عندما تؤول h إلى الصفر؟

٢-١٤) يتبع منحنى تعداد السكان P(t) لإحدى الدول المعادلة التفاضلية للمنحنى :

$P' = a\,P - b\,P^2$

نفرض أن t ترمز إلى عدد السنوات بعد عام 1900 (فمثلا $t = 40.0$ تشير إلى عام 1940) ، ونفرض أن حجم الخطوة $h = 10$ ، وأن القيمتين $a = 0.02 , b = 0.00004$ تنتجان نموذجا (model) للتعداد السكاني. أوجد تقريبات أويلر لقيم P(t) ، واملأ الجدول التالي مقرِّبا أي قيمة P_k لأقرب كسر عشري (nearest tenth).

Year	tk	P(tk) القيمة الحقيقية Actual	Pk القيمة التقريبية Euler approximation
1900	0.0	76.1	76.1
1910	10.0	92.4	89.0
1920	20.0	106.5	------
1930	30.0	123.1	------
1940	40.0	132.6	138.2
1950	50.0	152.3	------
1960	60.0	180.7	------
1970	70.0	204.9	202.8
1980	80.0	226.5	------

٢-١٥) اثبت أنه عند تطبيق طريقة أويلر لحل مسألة القيمة الابتدائية IVP:

$$y' = f(t) \quad , \quad t \in [a , b] \quad , \quad y(a) = y_0 = 0$$

فإننا نحصل على النتيجة :

$$y(b) = \sum_{k=0}^{M-1} f(t_k) \,.\, h$$

والتي هي مجموع " ريمان " (Riemann sum) الذي يعطى تقريبا للتكامل المحدود للدالة f(t) على الفترة [a , b].

٢-١٦) نفرض أنه عند قفز أحد الأشخاص (skydiver) من الطائرة وحتى لحظة فتح المظلة (parachute) فإن مقاومة الهواء تتناسب مع $v^{\frac{3}{2}}$ ، حيث $v(t)$ هي السرعة عند اللحظة t. ونفرض أن الفترة الزمنية هي [0 , 6] ، وأن المعادلة التفاضلية للحركة في الاتجاه لأسفل (downward direction) هي:

$$v' = 32 - 0.032\, v^{\frac{3}{2}} ; \quad t \in [0,6], \quad v(0) = 0$$

استخدم طريقة أويلر بحجم خطوة $h = 0.1$ لإيجاد حل المسألة.

٢-١٧) نفرض أن مجتمعا سكانيا (community) يتكون من L شخص ، بينهم P شخص مصابون بعدوى (infected) ، و Q شخص غير مصابين (uninfected) . ونفرض أن $y(t)$ تشير إلى عدد الأشخاص المصابين بالعدوى عند الزمن t . بالنسبة للأمراض المتوسطة / الخفيفة (mild illness) كالإصابة بالبرد مثلا فإن الأشخاص المصابين يستمرون في نشاطهم وممارسة أعمالهم وبالتالي تنتشر العدوى (epidemic) منهم إلى الأصحاء ، ونظرا لوجود عدد PQ من الاتصالات / الاحتكاكات المحتملة (possible contacts) بين هاتين المجموعتين (مجموعة المرضى ومجموعة الأصحاء) ، فإن معدل تغير $y(t)$ يتناسب مع PQ . وبالتالي فيمكن صياغة المسألة كمسألة قيمة ابتدائية IVP :

$$y' = ky\,(L - y) ; \qquad y(0) = y_0$$

استخدم القيم التالية :

$$L = 25{,}000 , \quad k = 0.00003 , \quad h = 0.2 , \quad y(0) = 250,$$

لإيجاد الحل التقريبي بطريقة أويلر على الفترة [0 , 12].

٢-١٨) اثبت أن طريقة أويلر تفشل لإيجاد تقريب للحل $y(t) = t^{\frac{3}{2}}$ لمسألة القيمة الابتدائية IVP :

$$y' = f(t,y) = 1.5\, y^{\frac{1}{3}}; \quad y(0) = 0.$$

علِّل إجابتك موضحا الصعوبات التي تواجه الحل بهذه الطريقة.

٢-١٩) هل يمكن تطبيق طريقة أويلر لحل مسألة القيمة الابتدائية التالية؟

$$y' = 1 + y^2; \quad t \in [0\,,\,3], \quad y(0) = 0$$

إرشاد : الحل المضبوط هو $y(t) = \tan t$

الفصل الثالث

طريقة هُوِين " أو طريقة أُويْلَرْ المحسَّنة "
Heun's Method (or Improved Euler's Method)

تقدم هذه الطريقة فكرة جديدة لإنشاء الخوارزمية المطلوبة لحل مسألة القيمة الابتدائية:

$$y'(t)=f(t,y(t));\quad t\in[a,b],\quad y(t_0)=y_0 \qquad (1)$$

فللحصول على نقطة الحل $(t_1\ ,\ y_1)$ نستطيع استخدام النظرية الأساسية في حساب التفاضل ، ونكامل $y'(t)$ على الفترة $[t_o\ ,\ t_1]$ لنحصل على :

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t,y(t))\,dt=\int_{t_0}^{t_1} y'(t)\,dt=y(t_1)-y(t_0) \qquad (2)$$

حيث تكامل $y'(t)$ هو الدالة المطلوبة $y(t)$.

وعندما نقوم بحل المعادلة (2) لإيجاد $y(t_1)$ فإننا نحصل على النتيجة :

$$y(t_1)=y(t_0)+\int_{t_0}^{t_1} f(t,y(t))\,dt \qquad (3)$$

والآن يمكننا تطبيق إحدى طرق التكامل العددي لإيجاد قيمة تقريبية للتكامل المحدود الموجود في العلاقة (3) . فإذا طبقنا قاعدة شبه المنحرف بحجم خطوة $h=t_1-t_o$ فإننا نحصل على النتيجة :

$$y(t_1)\approx y(t_0)+\frac{h}{2}[f(t_0,y(t_0))+f(t_1,y(t_1))] \qquad (4)$$

لاحظ أن الطرف الأيمن في العلاقة 4 يحتوي على القيمة المطلوب تعيينها $y(t_1)$ ، ولذا فيلزمنا تقدير قيمة لـ $y(t_1)$. ويكفي هنا أن نستخدم طريقة أويلر لعمل هذا التقدير ، فإذا قمنا بتقدير هذه القيمة باستخدام التقريب بطريقة أويلر

، وعوضنا هذا التقدير في العلاقة (4) فإننا نحصل على النتيجة التالية التي تستخدم لإيجاد (t_1 , y_1) :

$$y_1 = y(t_0) + \frac{h}{2}[f(t_0, y_0) + f(t_1, y_0 + hf(t_0, y_0))] \qquad (5)$$

وتسمى هذه العلاقة **قانون / طريقة هُوين أو طريقة أويلر المحسَّنة.**

وتكرر هذه العملية لتعطينا متتالية من النقاط التي تعتبر تقريبا لمنحنى الحل $y = y(t)$. وفي كل خطوة من خطوات هذه الطريقة العددية نستخدم أولا تقريب أويلر كتقدير أولى (prediction) ثم قاعدة شبه المنحرف كتصحيح (correction) ، لنحصل بذلك على القيمة النهائية المطلوبة.

وبذلك يمكننا أن نلخص الخطوة العامة (general step) في طريقة هوين / أويلر المعدلة فيما يلي :

$$\left.\begin{aligned} p_{k+1} &= y_k + h.f(t_k, y_k), \quad t_{k+1} = t_k + h, \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2}[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, p_{k+1})]. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

ويوضح الشكل التالي (شكل ٣-١) المعنى الهندسي لكيفية الحصول على القيمة النهائية في طريقة هوين، وذلك عن طريق خطوتين: الأولى تقدير أولي (عن طريق الاشتقاق/التفاضل) والثانية تصحيح (عن طريق التكامل).

(a) Derivative predictor
$p_1 = y_o + hf(t_o, y_o)$
تقدير أولي تفاضلي

(b) Integral corrector
$y_1 - y_o = \frac{h}{2}(f_o + f_1)$
تصحيح تكاملي

شكل ٣-١

حيث نرسم أولا الخط المستقيم المماس لمنحنى الحل $y = y(t)$ عند النقطة (t_0 , y_0) ، وعن طريقه نصل إلى نقطة التقدير الأولي (t_1 , p_1) predicted point. والآن ننظر إلى المنحنى $z = f(t, y(t))$ ، ونأخذ في الاعتبار النقطتين :

$$(t_0 , f_0) \quad , \quad (t_1 , f_1)$$

حيث :

$$f_0 = f(t_0 , y_0) \quad , \quad f_1 = (t_1 , p_1)$$

فتكون مساحة شبه المنحرف ذي الرأسين (t_1 , f_1) , (t_0 , f_0) هي القيمة التقريبية للتكامل المحدود الموجود في العلاقة (3) ، والتي استخدمناها للحصول على القيمة النهائية المطلوبة في المعادلة (5).

العلاقة بين حجم الخطوة والخطأ (Step Size versus Error)

حد الخطأ (error term) المصاحب لتطبيق قاعدة شبه المنحرف لتقريب التكامل الموجود في العلاقة (3) هو :

$$- y''(c_k).\frac{h^3}{12} \qquad (7)$$

فإن كان هذا الخطأ – والمعطى في التعبير (7) – هو الخطأ الوحيد في كل خطوة ، فبعد عدد M من الخطوات يكون الخطأ المتراكم (accumulated error) عند تطبيق طريقة هوين هو :

$$-\sum_{k=1}^{M} y''(c_k).\frac{h^3}{12} \approx \frac{b-a}{12}.y''(c).\, h^2 \approx O\left(h^2\right) \qquad (8)$$

النظرية التالية عن دقة طريقة هوين تعطي العلاقة بين الخطأ الشامل النهائي FGE وحجم الخطوة h ، وتعطينا كذلك فكرة عن مدى الجهد المطلوب بذله في إجراء الحسابات للحصول على تقريبات دقيقة بطريقة هوين.

نظرية ٣-١ (دقة طريقة هوين) (Precision of Heun's Method)

نفرض أن $y(t)$ هي حل مسألة القيمة الابتدائية (1).

إذا كانت $y(t)\in C^3[t_0,b]$

وكانت $\{(t_k,y_k); \quad k=0,1,2,...,M\}$

هي متتابعة التقريبات الناتجة من تطبيق طريقة هوين ، فإن

$$\left.\begin{aligned} |e_k| \equiv |y(t_k) - y_k| &= O\left(h^2\right), \\ |e_{k+1}| = |y(t_{k+1}) - y_k - h\,\phi(t_k,y_k)| &= O\left(h^3\right) \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

حيث

$$\phi(t_k, y_k) = y_k + \frac{h}{2}[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + hf(t_k, y_k))]$$

وبصورة خاصة فإن الخطأ الشامل النهائي FGE عند نهاية الفترة سيحقق العلاقة :

$$E(y(b), h) = |y(b) - y_M| = O(h^2) \qquad (10)$$

والمثالان التاليان يوضحان هذه النظرية. ونلاحظ أنه عند حساب التقريبات بهذه الطريقة وبحجمي خطوة $h, \frac{h}{2}$ (أي أن حجم إحدى الخطوتين ضعف حجم الأخرى) فيجب أن نحصل على :

$$E(y(b), h) \approx Ch^2 \qquad (11)$$

$$E\left(y(b), \frac{h}{2}\right) \approx C\frac{h^2}{4} = \frac{1}{4}E(y(b), h) \qquad (12)$$

بمعنى أنه إذا خفض حجم الخطوة في طريقة هوين إلى نصف قيمته فإننا نتوقع أن يقل الخطأ الشامل النهائي الكلي (overall FGE) إلى ربع قيمته ، وهذه هي الفكرة الأساسية في النظرية السابقة.

مثال ٣-١ :

استخدم طريقة هوين لحل مسألة القيمة الابتدائية IVP

$$y' = \frac{t-y}{2}; \quad t \in [0,3], \quad y(0) = 1$$

متخذا حجم الخطوة

$$h = 1 \ , \ \frac{1}{2} \ , \ \frac{1}{4} \ , \ \frac{1}{8}.$$

قارن بين الحلول في هذه الحالات المختلفة لحجم الخطوة h.

الحل:

نستطيع الحصول على التقريبات المطلوبة لقيم y – أي الحصول على حل المسألة بطريقة هوين – باستخدام العلاقات (6) ، فمثلا : عندما $h = \frac{1}{4}$

$$y' = f(t, y) = \frac{t-y}{2}$$

$$t_0 = 0 \ , \ y_0 = 1$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, p_{k+1})],$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}[f(t_0, y_0) + f(t_1, p_1)]$$

$$f(t_0, y_0) = f(0,1) = \frac{0-1}{2} = -0.5$$

$$p_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$$

$$p_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) = 1 + 0.25\,(-0.5) = 0.875$$

$$f(t_1, p_1) = f(0.25\,,\, 0.875) = \frac{0.25-0.875}{2} = -\ 0.3125$$

$$\therefore\ y_1 = 1 + \frac{0.25}{2}[-0.5 - 0.3125] = 0.8984375$$

ويمكن الاستمرار في إجراء باقي الحسابات بالكيفية نفسها ، حتى نصل إلى حساب y_{12} وهي قيمة y عندما $t = 3$. وكذلك يمكننا حساب جميع قيم y الأخرى لقيم h المختلفة المعطاة. والجدول التالي يعطي ويقارن بين الحلول المختلفة – بطريقة هوين – المقابلة لقيم حجم الخطوة h المختلفة ، وذلك عند عدة نقاط مختارة مع إعطاء قيم الحل المضبوط (exact) عند هذه النقاط ، حيث الحل المضبوط هو :

$$y(t) = 3\,e^{-\frac{t}{2}} - 2 + t$$

t_k	y_k				$y(t_k)$ Exact
	h=1	$h = \frac{1}{2}$	$h = \frac{1}{4}$	$h = \frac{1}{8}$	
0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.125				0.943359	0.943239
0.25			0.898438	0.897717	0.897491

0.375				0.862406	0.862087
0.50		0.84375	0.838074	0.836801	0.836402
0.75			0.814081	0.812395	0.811868
1.00	0.875	0.831055	0.822196	0.820213	0.819592
1.50		0.930511	0.920143	0.917825	0.917100
2.00	1.171875	1.117587	1.106800	1.104392	1.103638
2.50		1.373115	1.362593	1.360248	1.359514
3.00	1.732422	1.682121	1.672269	1.670076	1.669390

والشكل التالي (شكل ٣-٢) يعطي منحنيات : الحل المضبوط $y = y(t)$ والحل بطريقة هوين للقيمتين $h = 1 \ , \ h = \frac{1}{2}$ للمقارنة بينها ، وذلك في الفترة [0,2].

شكل ٣-٢

مثال ٣-٢ :

قارن بين قيم الخطأ الشامل النهائي FGE عندما نطبق طريقة هوين لحل المسألة

$$y' = \frac{t-y}{2} \quad ; \quad t \in [0,3] \quad , \quad y(0) = 1$$

متخذين القيم التالية لحجم الخطوة :

$$h = 1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{4} , \dots , \frac{1}{64}$$

الحل :

الجدول التالي يوضح العلاقة بين حجم الخطوة h والخطأ الشامل النهائي FGE ، حيث يعطي الجدول قيم هذا الخطأ عند النقطة $t = 3$ (والخطأ هو الفارق بين الحل المضبوط $y(3)$ والحل العددي y_M الذي نحصل عليه عند تطبيق طريقة هوين) وذلك لقيم h المختلفة.

حجم الخطوة Step size, h	عدد الخطوات Number of steps, M	تقريب y(3) Approximation to y(3), y_M	الخطأ عند t=3 Error at t=3, y(3) - y_M	$O(h^2)=Ch^2$ حيث C=-0.0432
1	3	1.732422	-0.063032	-0.043200
$\frac{1}{2}$	6	1.682121	-0.012731	-0.010800
$\frac{1}{4}$	12	1.672269	-0.002879	-0.002700
$\frac{1}{8}$	24	1.670076	-0.000686	-0.000675
$\frac{1}{16}$	48	1.669558	-0.000168	-0.000169
$\frac{1}{32}$	96	1.669432	-0.000042	-0.000042
$\frac{1}{64}$	192	1.669401	-0.000011	-0.000011

ومن هذا الجدول يتبين لنا أن الخطأ في تقريب y(3) المحسوب بطريقة هوين ينخفض تقريبا إلى ربع قيمته عندما يقل حجم الخطوة إلى نصف قيمته.

$$E(y(3),h) = y(3) - y_M = O(h^2) \approx Ch^2$$

حيث

$$C = -0.0432$$

* * *

في ختام هذا الفصل نلخص فيما يلي خطوات طريقة هوين (طريقة أويلر المحسَّنة) لإيجاد الحل التقريبي لمسألة القيمة الابتدائية :

$$y' = f(t,y) \quad ; \quad t \in [a,b], \quad y(a) = y_0$$

باستخدام العلاقة

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + hf(t_k, y_k))\right];$$

$$k = 0,1,2,\ldots,M-1.$$

خوارزمية طريقة هوين (طريقة أويلر المحسَّنة)

Heun's method (Improved Euler's method) Algorithm

```
    INPUT A, B, Y(0)                    {Endpoints and initial value}
    INPUT M                                      {Number of steps}
    H := [B – A] / M                          {Compute the step size}
    T(0) := A                                  {Initialize the variable}
FOR   J = 0   TO   M-1   DO
|   K1 := F(T(J),Y(J))                          {Function value at t_i}
|   P := Y(J) + H*K                          {Euler predictor for y_j+1}
|   T(J+1) := A + H*[J+1]                {Compute the mesh point t_j+1}
|   K2 := F(T(J+1),P)                          {Function value at t_j+1}
|__ Y(J+1):=Y(J) + H*[K1+K2]/2              {Trapezoidal corrector}

FOR   J = 0   TO   M   DO                                    {Output}
└── PRINT   T(J) , Y(J)
```

تمرينات رقم ٣

٣-١) نفرض أن لدينا مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = - x\, y^2 \;\; ; \;\; y(0) = 2$$

أوجد قيمة y عند $x = 0.2$

أ) باستخدام خطوة واحدة (one step) من طريقة هوين حيث حجم الخطوة $h = 0.2$.

ب) باستخدام خطوتين (two steps) من الطريقة نفسها حيث حجم الخطوة $h = 0.1$.

احسب الخطأ عند $x = 0.2$ في كل من الحالتين أ) ، ب) ، وعلِّق على سلوك الخطأ (behaviour of the error) عندما تؤول h إلى الصفر $(h \to 0)$.

٣-٢) نفرض أن لدينا مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(x , y) = y \;\; ; \;\; y(0) = 1$$

إذا طبقنا طريقة هوين لحل هذه المسألة باتخاذ حجم الخطوة مساويا h فإننا نحصل بعد عدد n من الخطوات على القيمة

$$y_n = [A(h)]^n$$

كتقريب للحل المضبوط

$$y(x_n) \equiv y(nh) = e^{nh}$$

أ) أوجد تعبيرا جبريا (algebraic expression) لـ A(h).

ب) احسب قيمة y عند $x = 0.2$ باتخاذ $h = 0.2$ ومرة أخرى باتخاذ $h = 0.02$ ، واحسب الخطأ عند $x = 0.2$ في كل من الحالتين ، وعقِّب على سلوك الخطأ عندما تؤول h إلى الصفر.

٣-٣) تنتمي طريقة هوين إلى طائفة الطرق المسماة " طرق رونج كوتَّا "[١] (Runge-Kutta methods) ، حيث تعد طريقة هوين " طريقة رونج كوتا من الرتبة الثانية " (second-order Runge Kutta method). ومن النتائج الجديرة بالملاحظة على هذه الطرق أن الخطأ يعتمد على كل من صيغة المعادلة المطلوب حلها ، والحل نفسه. وكمثال على ذلك:

أ) اثبت أن $y(x) = x^2$ هي حل كل من المسألتين التاليتين:

(I) $y' = 2x \ , \quad y(1) = 1$

(II) $y' = \frac{2y}{x} \ , \quad y(1) = 1$

ب) ثم بَيِّن أن طريقة هوين تعطي نتائج مضبوطة (exact) بالنسبة للمعادلة الأولى ، وغير المضبوطة بالنسبة للثانية رغم أن لها الحل نفسه.

إرشاد : بعد تطبيق الصيغة الخاصة بطريقة هوين على المعادلة المعطاة والحصول على العلاقة الارتدادية (recurrence relation) التي تعطي القيم العددية المتتابعة y_k ، تَحَقَّق (check) ما إذا كانت هذه العلاقة تتحقق (is satisfied) أم لا عندما نعوض $y_k = x_k^2$ (أي أن الحل العددي = الحل المضبوط).

ج) كتوضيح لذلك ، طبق طريقة هوين متخذا $h = 0.1$ على كل من المسألتين لحساب y عند $x = 1.1$ واحسب الخطأ المقابل.

في كل من المسائل التالية من ٣-٤) إلى ٣-٨) استخدم طريقة هوين لإيجاد الحلول التقريبية لمسائل القيمة الابتدائية المعطاة باتباع الخطوات التالية :

---

[١] سندرس هذه الطرق بإذن الله في الفصل الخامس من هذا الكتاب.

أ) احسب قيم $y_1 , y_2 , \dots , y_M$ لكل من الحالات الثلاث :

(i) $h = 0.2,\ M = 1$ (ii) $h = 0.1 , M = 2$ (iii) $h = 0.05, M = 4$

ب) قارن الحل المضبوط $y(0.2)$ مع الحلول التقريبية الثلاثة التي حصلت عليها في (أ). هل لاحظت أن قيم الخطأ الشامل النهائي في القيم التي حصلت عليها في (أ) تتفق مع النتيجة المتوقعة عندما تقل قيمة حجم الخطوة h إلى نصف قيمتها ؟

ج) استخدم حاسوبا لإجراء الحسابات على الفترة الأكبر $[a\ ,\ b]$ المعطاة.

٣-٤) أ) أوجد حل المسالة IVP :

$$y' = t^2 - y , \quad t \in [0 , 0.2] , \quad y(0) = 1$$

ب) قارن مع الحل المضبوط :

$$y(t) = -e^{-t} + t^2 - 2t + 2$$

ج) أعد حل المسألة المعطاة في أ) في الفترة :

$$[a , b] = [0 , 2] ; \quad h = 0.2 , 0.1 , 0.05.$$

٣-٥) أ) أوجد حل المسألة

$$y' = 3y + 3t ; \quad t \in [0 , 0.2] , \quad y(0) = 1.$$

ب) قارن مع الحل المضبوط

$$y(t) = \frac{4}{3}e^{3t} - t - \frac{1}{3}$$

ج) أعد حل المسألة في الفترة

$$[a , b] = [0 , 2] ; \quad h = 0.2 , 0.1 , 0.05.$$

٣-٦) أ) أوجد حل المسألة

$$y' = -ty , \quad t \in [0 , 0.2] , \quad y(0) = 1.$$

ب) قارن مع الحل المضبوط : $y = e^{-t^2/2}$

ج) أعد حل المسألة في الفترة

$$[a , b] = [0 , 2] ; \quad h = 0.2 , 0.1 , 0.05.$$

٣-٧) أ) أوجد حل المسألة

$$y' = e^{-2t} - 2y\,; \quad t \in [0,0.2], \quad y(0) = \frac{1}{10}$$

ب) قارن مع الحل المضبوط

$$y(t) = \frac{1}{10}e^{-2t} + t\,.\,e^{-2t}$$

ج) أعد حل المسألة في الفترة

$$[a\,,\,b] = [0\,,\,2]\,; \qquad h = 0.2\,,\,0.1\,,\,0.05.$$

٣-٨) أ) أوجد حل المسألة

$$y' = 2ty^2\,; \qquad t \in [0\,,\,0.2]\,, \quad y(0) = 1.$$

ب) قارن مع الحل المضبوط

$$y(t) = 1/(1 - t^2)\,.$$

ج) أعد حل المسألة في الفترة

$$[a\,,\,b] = [0\,,\,2]\,; \qquad h = 0.1\,,\,0.05\,,\,0.025.$$

لاحظ أن طريقة هوين ستؤدي إلى إيجاد قيمة تقريبية لـ $y(1)$ رغم أن منحنى الحل غير معرَّف عند $t = 1$.

٣-٩) نفرض أن قذيفة ما (a projectile) تطلَق رأسيا لأعلى وتسقط رأسيا لأسفل. فإذا كانت مقاومة الهواء تتناسب مع السرعة ، فإن مسألة القيمة الابتدائية للسرعة $v(t)$ هي:

$$v' = -32 - \frac{K}{M}v \quad ; \quad v(0) = v_0$$

حيث v_0 : السرعة الابتدائية ، M : الكتلة ، K = معامل مقاومة الهواء. افرض أن $v_0 = 160$ ft/sec و $K/M = 0.1$.

استخدم طريقة هوين متخذا $h = 0.5$ لحل المسألة :

$$v' = -32 - \frac{v}{10} \quad ; \quad t \in [0,30] \quad , \quad v(0) = 160$$

ملاحظة : يمكنك مقارنة الحل الذي حصلت عليه باستخدام الحاسوب بالحل المضبوط $v(t) = 480\, e^{-t/10} - 320$ ولاحظ أن حد السرعة (limiting velocity) هو 320 ft/sec–.

٣-١٠) استخدم طريقة هوين متخذا $h = 0.1$ لحل مسألة القيمة الابتدائية :

$$R' = \frac{dR}{dS} = \frac{1}{S} \quad ; \quad S \in [0.1,\ 5.1] \quad , \quad R(0.1) = 0$$

ملاحظة : تظهر هذه المسألة في علم النفس حيث :

R : رد الفعل Reaction ، S : الحث / الإثارة stimulus

والمعادلة التفاضلية المعطاة هي قانون " وبر–فشنر " (Weber-Fechner law) للعلاقة بين الحث والاستجابة stimulus-response.

٣-١١) اثبت أنه عند استخدام طريقة هوين لحل مسألة القيمة الابتدائية IVP :

$$y' = f(t) \quad ; \quad t \in [a,b] \quad , \quad y(a) = y_0 = 0$$

فإننا نحصل على النتيجة

$$y(b) \approx \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{M-1} [f(t_k) + f(t_{k+1})]$$

والتي هي عبارة عن تقريب التكامل المحدود للدالة f(t) على الفترة [a , b] باستخدام قاعدة شبه المنحرف.

٣-١٢) يمكننا استخدام طريقة ريتشاردسون للتحسين (Richardson improvement method) مع طريقة هوين. فإذا طبقنا طريقة هوين بحجم خطوة h وحصلنا على الحل العددي y_h فإن

$$y(b) = y_h + C\, h^2$$

ثم إذا طبقنا طريقة هوين مرة أخرى ولكن هذه المرة بحجم خطوة 2h وحصلنا على الحل العددي y_{2h} فإن

$$y(b) = y_{2h} + 4\, C\, h^2$$

والآن يمكننا حذف الحدين اللذين يحتويان على $C\,h^2$ للحصول على قيمة تقريبية أدق (قيمة تقريبية محسنة improved approximation) لـ y(b) ، فنحصل على الصيغة :

$$y(b)=\frac{4y_h-y_{2h}}{3}$$

يمكن استخدام هذه الصيغة التحسينية مع القيم التي حصلنا عليها في مثال ٣-٢ لنحصل على تقريبات أفضل لـ y(3). أكمل القيم الناقصة في الجدول التالي :

h	y_h	$(4y_h - y_{2h})/3$
1	1.732422	
1/2	1.682121	1.665354
1/4	1.672269	----------
1/8	1.670076	----------
1/16	1.669558	1669385
1/32	1.669432	----------
1/64	1.669401	----------

٣-١٣) اثبت أن طريقة هوين تفشل في إيجاد قيمة تقريبية للحل $y(t)=t^{\frac{3}{2}}$ لمسألة القيمة الابتدائية

$$y'=f(t,y)=1.5\,y^{\frac{1}{3}} \quad ; \quad y(0)=0.$$

علل إجابتك موضحا الصعوبات التي تواجه الحل بهذه الطريقة.

الفصل الرابع

طريقة متسلسلة تايلور
Taylor Series Method

تتميز طريقة متسلسلة تايلور بإمكانية تطبيقها بصورة عامة ، وبأنها تعطي القيم (القياسية) (standard) التي نقارن بها دقة الطرق العددية المتنوعة الأخرى لحل مسألة قيمة ابتدائية ما. ويمكن تطبيق طريقة تايلور بحيث يصل الحل الذي نحصل عليه إلى أي درجة دقة محددة سلفا.

وفي هذه الطريقة نقوم بتقريب حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ عدديا عن طريق التعبير عن الحل $y(t)$ بمفكوك تايلور حول نقطة ابتدائية t_o (some starting point):

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t_0 + h) \\ &= y(t_0) + hy'(t_0) + \frac{h^2}{2!} y''(t_0) + \frac{h^3}{3!} y'''(t_0) + \dots \\ &= y(t_0) + hf(t_0, y(t_0)) + \frac{h^2}{2!} f'(t_0, y(t_0)) \\ &\quad + \frac{h^3}{3!} f''(t_0, y(t_0)) + \dots \end{aligned}$$

حيث :

$$f'(t_0, y(t_0)) \equiv \frac{d}{dt} f(t, y(t)) \quad ; \quad t = t_0, y = y(t_0)$$

$$f''(t_0, y(t_0)) \equiv \frac{d^2}{dt^2} f(t, y(t)) \quad ; \quad t = t_0, y = y(t_0)$$

$$\vdots$$

وحيث أن f دالة في كل من t , y ، فإن :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

وبالمثل يمكن إيجاد المشتقات الأعلى. وعموما فللانتقال في خطوة من t_i إلى $t_{i+1} = t_i + h$ نستخدم العلاقة

$$y(t_{i+1}) = y(t_i + h) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2!} f'(t_i, y(t_i))$$
$$+ \frac{h^3}{3!} f''(t_i, y(t_i)) + \cdots + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(\xi + y(\xi)); \quad t_i < \xi < t_{i+1}$$

مثال ٤-١:

أوجد باستخدام مفكوك تايلور حل مسألة القيمة الابتدائية:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = x + y; \quad y(x_0) = y_0$$

الحل :

$$f'(x,y) = 1 + 1.(x + y) = 1 + x + y$$
$$f'(x_0, y_0) = 1 + x_0 + y_0$$
$$f''(x,y) = 1 + 1.(x + y) = 1 + x + y$$
$$f''(x_0, y_0) = 1 + x_0 + y_o$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x,y) = 1 + x + y$$
$$f^{(n)}(x_0, y_0) = 1 + x_0 + y_0$$

ومفكوك $y(x)$ بمتسلسلة تايلور حول $x = x_0$ يعطينا :

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + h(x_0 + y(x_0)) + \frac{h^2}{2!}(1 + x_0 + y(x_0))$$
$$+ \frac{h^3}{3!}(1 + x_0 + y(x_0)) + ...$$
$$= (1 + x_0 + y(x_0))\left[\frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} + ...\right] +$$
$$y(x_0) + h(x_0 + y(x_0))$$
$$= (1 + x_0 + y(x_0))\left[1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + ...\right] - 1 - h - x_0$$

وبالمثل فللانتقال في خطوة من x_i إلى $x_{i+1} = x_i + h$ نحصل على :

$$y_{i+1} = (1 + x_i + y_i)\left[1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \ldots\right] - 1 - h - x_i$$

[وذلك باستخدام y_{i+1} بدلا من $y(x_{i+1})$ ، وكذلك y_i بدلا من $y(x_i)$].

ملاحظة :

لإيجاد الحل المضبوط لهذه المسألة :

المعادلة التفاضلية المعطاة هي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى.

$$\frac{dy}{dx} - y = x$$

العامل المكامل : $\mu = e^{\int -1 dx} = e^{-x}$

$$y \cdot e^{-x} = \int e^{-x} \cdot x \, dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + c$$

$$y = -(1 + x) + c\, e^{x}$$

$$y_0 = -(1 + x_0) + c\, e^{x_0} \Rightarrow c = e^{-x_0}(1 + x_0 + y_0)$$

$$y_0 = -(1 + x) + e^{-x_0}(1 + x_0 + y_0)e^{x}$$

وبوضع $x = x_0 + h$ نحصل على :

$$y \equiv y(x) \equiv y(x_0 + h) = -(1 + x_0 + h) + e^{h}(1 + x_0 + y_0)$$

أي أن الحل باستخدام مفكوك تايلور يتفق مع الحل التحليلي (المضبوط) exact / analytical solution ، وذلك لأن

$$\left[1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \ldots\right] = e^{h} \qquad \text{(مفكوك تايلور)}$$

والخطأ الناتج عن قطع (truncation) المتسلسلة بعد الحد الذي يحتوي على $f^{(n-1)}$ يعطى بالتعبير

$$\frac{(1+\xi+y(\xi))}{(n+1)!}.h^{n+1} \quad ; \quad \xi \in (x_0 , x_0 + h)$$

وفيما يلي نعيد صياغة نظرية تايلور بحيث نضعها في صيغة مناسبة أكثر لحل المعادلات التفاضلية.

نظرية ٤-١ (نظرية تايلور)

نفرض أن

$$y(t) \in C^{N+1}[t_0, b]$$

وأن $y(t)$ لها مفكوك متسلسلة تايلور من الرتبة N حول القيمة الثابتة $t = t_k \in [t_0, b]$:

$$y(t_k + h) = y(t_k) + hT_N(t_k, y(t_k)) + O\left(h^{N+1}\right), \qquad (1)$$

حيث :

$$T_N(t_k, y(t_k)) = \sum_{j=1}^{N} \frac{y^{(j)}(t_k)}{j!} h^{j-1}. \qquad (2)$$

و $y^{(j)}(t) = f^{(j-1)}(t, y(t))$ تعني المشتقة الكلية من الدرجة j- j-1] [1st total derivative) للدالة f بالنسبة لـ t. ويمكن حساب صيغ المشتقات المختلفة ارتداديا (recursively) كما يلي:

$$\begin{aligned}
y'(t) &= f, \\
y''(t) &= f_t + f_y y' = f_t + f_y f, \\
y^{(3)}(t) &= f_{tt} + 2f_{ty}y' + f_y y'' + f_{yy}[y']^2 \\
&= f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2 + f_y\left(f_t + f_y f\right), \\
y^{(4)}(t) &= f_{ttt} + 3f_{tty}y' + 3f_{tyy}[y']^2 + 3f_{ty}y'' + \\
&\quad + f_y y''' + 3f_{yy}y'y'' + f_{yyy}[y']^3 \\
&= \left(f_{ttt} + 3f_{tty}f + 3f_{tyy}f^2 + f_{yyy}f^3\right) + f_y\left(f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2\right) \\
&\quad + 3\left(f_t + f_y f\right)\left(f_{ty} + f_{yy}f\right) + f_y^2\left(f_t + f_y f\right) \\
&\quad \vdots
\end{aligned} \qquad (3)$$

وعموما

$$y^{(N)}(t) = p^{(N-1)} f(t, y(t)), \qquad (4)$$

حيث P هو عامل / مؤثر الاشتقاق (derivative operator)

$$P = \left(\frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

ويمكن الحصول على الحل العددي التقريبي لمسألة القيمة الابتدائية IVP:

$$y'(t) = f(t, y) \; ; \qquad t \in [t_0, t_M]$$

بتطبيق الصيغة (1) على كل فترة جزئية $[t_k, t_{k+1}]$.

والخطوة العامة في طريقة تايلور من الرتبة N هي :

$$y_{k+1} = y_k + d_1 h + \frac{d_2 h^2}{2!} + \frac{d_3 h^3}{3!} + \ldots + \frac{d_N h^N}{N!}, \qquad (5)$$

حيث

$$d_j = y^{(j)}(t_k) \; ; \qquad j = 1,2,\ldots,N$$

وذلك لقيم k التالية

$$K = 0,1,2,\ldots,M\text{-}1$$

التي تعطي الخطوات المتتالية.

ومن خصائص طريقة تايلور من الرتبة (Taylor method of order) N أن الخطأ النهائي الشامل FGE يكون في حدود (of the order) $O(h^N)$ ، وبالتالي فيمكن اختيار قيمة كبيرة لـ N تكفي لجعل هذا الخطأ صغيرا جدا كما نشاء (لاحظ أن h تكون كسرا صغيرا أصغر من الواحد). وإذا تحددت قيمة N (the order) فيكون من الممكن نظريا تحديد قيمة حجم الخطوة h التي تجعل هذا الخطأ FGE صغيرا جدا كما نشاء. إلا أننا من الناحية العملية عادة نحسب مجموعتين من التقريبات باستخدام قيمتين لحجم الخطوة $h, \frac{h}{2}$ ونقارن بين النتائج.

نظرية ٤-٢ (دقة طريقة تايلور من الرتبة N) :

نفرض أن $y(t)$ هي حل مسألة القيمة الابتدائية IVP.

إذا كانت $y(t) \in C^{N+1}[t_0, b]$

وكانت $\{(t_k, y_k)\ ;\quad k = 0,1,...,M\}$

هي متتابعة التقريبات التي تولدها طريقة تايلور من الرتبة N ، فإن :

$$|e_k| = |y(t_k) - y_k| = O(h^N),$$
$$|\in_{k+1}| = |y(t_{k+1}) - y_k - hT_N(t_k, y_k)| = O(h^{N+1}). \quad (6)$$

وبصفة خاصة فإن الخطأ الشامل النهائي FGE عند نهاية الفترة سوف يحقق العلاقة :

$$E(y(b), h) = |y(b) - y_M| = O(h^N). \quad (7)$$

ويمكن مراجعة برهان هذه النظرية في المرجع [ ].

المثالان التاليان يوضحان هذه النظرية في الحالة $N = 4$. فإذا حسبت التقريبات باستخدام حجم خطوة h ، ومرة أخرى باستخدام حجم خطوة $\frac{h}{2}$ ، فإننا نتوقع الحصول على :

$$E(y(b), h) \approx Ch^4. \quad (8)$$
$$E\left(y(b), \frac{h}{2}\right) \approx C\frac{h^4}{16} \approx \frac{1}{16}E(y(b), h). \quad (9)$$

أي أنه إذا نقص حجم الخطوة h – في طريقة تايلور من الرتبة الرابعة – إلى نصف قيمته ، فإن الخطأ الشامل النهائي FGE يقل إلى $\frac{1}{16}$ من قيمته.

مثال ٤-٢ :

استخدم طريقة تايلور من الرتبة $N = 4$ لحل المسألة

$$y' = \frac{t-y}{2} \quad ; \quad t \in [0,3] \quad , \quad y(0) = 1$$

قارن بين الحلول المختلفة في الحالات : $h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$.

الحل :

لاستخدام طريقة تايلور من الرتبة الرابعة يجب أولا إيجاد مشتقات الدالة $y(t)$ حتى المشتقة الرابعة. ونلاحظ أن $y(t)$ دالة في t ، وأننا نشتق

الصيغة $y'(t)=f(t,y(t))$ بالنسبة لـ t لنحصل على $y^{(2)}(t)$ ، ثم نستمر في عملية الاشتقاق للحصول على المشتقات الأعلى ، كما يلي:

$$y'(t)=\frac{t-y}{2},$$

$$y^{(2)}(t)=\frac{d}{dt}\frac{t-y}{2}=\frac{1-y'}{2}=\frac{1-(t-y)/2}{2}=\frac{2-t+y}{4},$$

$$y^{(3)}(t)=\frac{d}{dt}\frac{2-t+y}{4}=\frac{0-1+y'}{4}=\frac{-1+(t-y)/2}{4}=\frac{-2+t-y}{8},$$

$$y^{(4)}(t)=\frac{d}{dt}\frac{-2+t-y}{8}=\frac{-0+1-y'}{8}=\frac{1-(t-y)/2}{8}=\frac{2-t+y}{16}.$$

ولإيجاد y_1 نحسب قيم المشتقات السابقة عند النقطة $(t_0,y_0) = (0,1)$ ، كما يلي :

$$d_1 = y'(0)=\frac{0.0-1.0}{2}=-0.5,$$

$$d_2 = y^{(2)}(0)=\frac{2.0-0.0+1.0}{4}=-0.75,$$

$$d_3 = y^{(3)}(0)=\frac{-2.0+0.0-1.0}{8}=-0.375,$$

$$d_4 = y^{(4)}(0)=\frac{2.0-0.0+1.0}{16}=-0.1875,$$

والآن نقوم بتعويض قيم المشتقات $\{d_j\}$ في المعادلة (5) مع التعويض عن حجم الخطوة بالقيمة $h = 0.25$ لنحصل [باستخدام الضرب المتداخل (nested multiplication)] على :

$$y_1 = 1.0 + 0.25\left\{-0.5 + 0.25\left[\frac{0.75}{2} + 0.25\left(\frac{-0.375}{6} + 0.25\frac{0.1875}{24}\right)\right]\right\}$$

$$= 0.8974915.$$

وبالتالي فإن نقطة الحل المحسوبة الآن هي

$$(t_1,y_1) = (0.25 , 0.8974915)$$

ولإيجاد y_2 علينا حساب قيم المشتقات $\{d_j\}$ عند النقطة (t_1,y_1) :

$$d_1 = y'(0) = \frac{0.25 - 0.8974915}{2} = -0.3237458\,,$$

$$d_2 = y^{(2)}(0) = \frac{2.0 - 0.25 + 0.8974915}{4} = 0.6618729\,,$$

$$d_3 = y^{(3)}(0) = \frac{-2.0 + 0.25 - 0.8974915}{8} = -0.3309364\,,$$

$$d_4 = y^{(4)}(0) = \frac{2.0 - 0.25 + 0.8974915}{16} = 0.1654682\,.$$

وبتعويض قيم هذه المشتقات $\{d_j\}$ في المعادلة (5) مع تعويض $h = 0.25$ نحصل – بالضرب المتداخل – على قيمة y_2 :

$$\begin{aligned} y_2 &= 0.8974915 \\ &\quad + 0.25 \left\{ -0.3237458 + 0.25 \left[\frac{0.6618729}{2} + \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + 0.25 \left(\frac{-0.3309364}{6} + 0.25\, \frac{0.1654682}{24} \right) \right] \right\} \\ &= 0.8364037\,. \end{aligned}$$

وبالتالي فإن نقطة الحل الجديدة هي :

$(t_1, y_1) = (0.50\ ,\ 0.8364037)$

والجدول التالي يعطي قيم الحل عند بعض النقاط المختارة للقيم المختلفة المعطاة لحجم الخطوة h :

t_k	y_k				$y(t_k)$ Exact
	h=1	$h = \frac{1}{2}$	$h = \frac{1}{4}$	$h = \frac{1}{8}$	
0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.125				0.9432392	0.9432392
0.25			0.8974915	0.8974908	0.8974917
0.375				0.8620874	0.8620874
0.50		0.8364258	0.8364037	0.8364024	0.8364023
0.75			0.8118696	0.8118679	0.8118678
1.00	0.8203125	0.8196285	0.8195940	0.8195921	0.8195920
1.50		0.9171423	0.9171021	0.9170998	0.9170997
2.00	1.1045125	1.1036826	1.1036408	1.1036385	1.1036383
2.50		1.3595575	1.3595168	1.3595145	1.3595144
3.00	1.6701860	1.6694308	1.6693928	1.6693906	1.6693905

مثال ٤-٣ :

قارن بين قيم الخطأ الشامل النهائي FGE المقابلة لقيم حجم الخطوة $h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ عند استخدام طريقة تايلور من الرتبة الرابعة لحل مسألة القيمة الابتدائية المعطاة في المثال السابق (مثال ٤-٢) :

$$y' = \frac{t-y}{2} \; ; \quad t \in (0,3) \; , \quad y(0) = 1 .$$

الحل :

الجدول التالي يوضح العلاقة بين حجم الخطوة h والخطأ الشامل النهائي FGE ، حيث يعطي الجدول قيم هذا الخطأ عند النقطة $t = 3$ (والخطأ هو الفارق بين الحل المضبوط $y(3)$ والحل العددي y_M الذي نحصل عليه عند تطبيق طريقة تايلور) وذلك لقيم h المختلفة.

حجم الخطوة Step Size, h	عدد الخطوات Number of steps, M	تقريب y(3) Appproximation To y(3), y_M	الخطأ عند t=3 Error at t=3, $y(3)-y_M$	$O(h^2) \approx Ch^4$ حيث C=-0.000614
1	3	1.6701860	-0.0007955	-0.0006140
$\frac{1}{2}$	6	1.6694308	-0.0000403	-0.0000384
$\frac{1}{4}$	12	1.6693928	-0.0000023	-0.0000024
$\frac{1}{8}$	24	1.6693906	-0.0000001	-0.0000001

ومن هذا الجدول يتبين لنا أن الخطأ في تقريب $y(3)$ المحسوب بطريقة تايلور ينخفض تقريبا إلى $\frac{1}{16}$ من قيمته عندما يقل حجم الخطوة إلى نصف قيمته.

$$E(y(3), h) = y(3) - y_M = O\left(h^4\right) \approx Ch^4$$

حيث

$$C = - 0.000614$$

* * *

في ختام هذا الفصل نلخص فيما يلي خوارزمية طريقة تايلور من الرتبة الرابعة لإيجاد الحل التقريبي لمسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t,y)\ ,\quad t \in [a,b]\ ,\quad y(a) = y_0$$

وذلك عن طريق إيجاد قيم المشتقات $y''\ ,\ y'''\ ,\ y''''$ واستخدام حدودية تايلور (Taylor polynomial) عند كل خطوة.

خوارزمية طريقة تايلور من الرتبة الرابعة

Taylor's method of order 4 Algorithm

```
        INPUT A, B, Y(0)      {Endpoints and initial value}
        INPUT M               {Number of steps}
        H := [B – A]/M        {Compute the step size}
        T(0) := A             {Initialize the variable}

FOR     K = 0  TO  M-1  DO
|       T := T(K) and Y := Y(K)
|       D1 := F1(T,Y)              {Slope function
f(t,y(t))}
|       D2 := F2(T,Y)              {Derivative of
f(t,y(t))}
|       D3 := F3(T,Y)              {Second derivative of
f(t,y(t))}
└       D4 := F4(T,Y)              {Third derivative of
f(t,y(t))}
        Y(K+1) := Y+H*[D1+H*[D2/2+H*[D3/6+H*D4/24]]]
        T(K+1) := A + H*[K+1]

FOR     K = 1  TO  M  DO                        {Output}
└       PRINT  T(K), Y(K)
```

تمرينات رقم ٤

٤-١) نفرض أن لدينا مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = x\, y^{\frac{1}{3}} ; \quad y(1) = 1$$

احسب قيمة y عند $x = 1.2$ باستخدام مفكوك تايلور حتى الحد الذي يحتوي على القوة الثانية (second power term) (المفكوك يشمل هذا الحد) ، وبأخذ حجم الخطوة $h = 0.1$. ثم احسب قيمة خطأ الاقتطاع في النتيجة التي حصلت عليها. قارن مع النتيجة التي نحصل عليها باستخدام طريقة أويلر (المسألة ٢-٣).

٤-٢) نفرض أن لدينا مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(x, y) \equiv -y ; \quad y(0) = 1$$

بأخذ حجم الخطوة $h = 0.1$ احسب قيمة y عند $x = 0.4$ باستخدام طريقة تايلور وبأخذ الثلاثة حدود الأولى فقط من المفكوك.

٤-٣) نفرض أن لدينا مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(x, y) \equiv -2xy ; \quad y(0) = 1 \qquad (*)$$

(i) بأخذ حجم الخطوة $h = 0.1$ احسب قيمة y عند $x = 0.2$ باستخدام مفكوك تايلور حتى الحد الذي يحتوي على القوة الثالثة (3rd power term) . وأجد خطأ الاقتطاع المقابل.

(ii) بأخذ حجم الخطوة $h = 0.1$ طبق صيغة النقطة المتوسطة "midpoint formula" :

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2h\, f(x_i, y_i)$$

لحل مسألة القيمة الابتدائية (*) وإيجاد قيمة y عند كل من $x = 0.2$, $x = 0.3$. احسب قيمة خطأ الاقتطاع عند $x = 0.2$ وقارن مع النتيجة التي حصلت عليها في الجزء (i).

ملاحظة : نحتاج إلى قيمة ابتدائية أخرى (extra starting value) ويمكن أن نأخذها من حل بمتسلسلة تايلور.

٤-٤) نفرض أن لدينا مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = x - y \quad ; \quad y(0) = 0 \qquad (*)$$

والتي حلها المضبوط هو : $y = x - 1 + e^{-x}$

(i) أوجد الحدود غير الصفرية (nonzero terms) الأربعة الأولى في مفكوك تايلور لحل مسألة القيمة الابتدائية (*).

(ii) نفرض أن المفكوك الذي حصلنا عليه في (i) قد تم قطعه (truncated) بعد الحد الثالث. أوجد مدى (range) قيم x الذي يجعل الحدودية الناتجة تمثل قيم y صحيحة لثلاثة أرقام عشرية.

(iii) باستخدام المتسلسلة المقطوعة (truncated series) التي حصلنا عليها في (ii) احسب قيمة y عند $x = 0.2$ ، وأوجد قيمة الخطأ المقابل.

(iv) باستخدام حجم الخطوة $h = 0.1$ احسب قيمة y عند $x = 0.2$ بمفكوك تايلور حتى الحد الذي يحتوي على القوة الرابعة (بما في ذلك هذا الحد). أوجد خطأ الاقتطاع الكلي المقابل ، وقارن مع النتيجة التي حصلت عليها في (iii).

٤-٥) نفرض أن لدينا مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = -xy^2 \; ; \quad y(0) = 2 \qquad (*)$$

(i) أوجد الحدود غير الصفرية الثلاثة الأولى في مفكوك تايلور للدالة y التي هي حل مسألة القيمة الابتدائية (*).

(ii) إذا قطع المفكوك الذي حصلنا عليه في (i) بعد الحد الثاني ، أوجد مدى قيم x الذي يجعل الحدودية الناتجة تمثل y صحيحة لثلاثة أرقام عشرية.

(iii) احسب بالمتسلسلة المقطوعة التي حصلت عليها في (ii) قيمة y عند $x = 0.1$. واحسب قيمة خطأ الاقتطاع المقابل ، وقارن مع النتيجة التي نحصل عليها بتطبيق طريقة أويلر (انظر المسألة ٢-٦).

٤-٦) اثبت أنه يمكن كتابة حل مسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dy}{dx} - 3x^2 y = 1 - 3x^3 ; \quad y(0) = 1$$

في صيغة متسلسلة القوى (power series) التالية :

$$y = 1 + x + x^3 + O\left(x^5\right)$$

٤-٧) أوجد مفكوك تايلور لحل المسألة

$$y' = y^2 ; \quad y(0) = 1$$

حول $x = 0$. استخدم هذا التقريب لحساب قيمة y عند كل من $x = 0.2 , x = 1.2$ صحيحة لأربعة أرقام عشرية. قارن النتيجة مع الحل المضبوط ، واشرح لماذا لم نحصل على نتيجة صحيحة في حالة $x = 1.2$.

٤-٨) i) اثبت أن تكامل "دوسن" (Dawson's integral) المعرف بالدالة

$$y(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$$

هو حل لمسألة القيمة الابتدائية

$$y' = 1 - 2xy ; \quad y(0) = 0$$

(ii) طبق طريقة متسلسلة تايلور حتى الحد الذي يشتمل على القوة الخامسة – بما في ذلك هذا الحد – ومتخذا حجم الخطوة $h = 0.5$ ، وذلك للحصول على قيمة y عند $x = 0.5$.

(iii) اختبر دقة accuracy النتيجة التي حصلت عليها لقيمة y(0.5) [أي أوجد عدد الأرقام العشرية الصحيحة

(correct decimals) في هذه النتيجة] إذا علمت أن قيمة $y(0.5)$ المضبوطة (exact value) صحيحة لسبعة أرقام عشرية – كما هي موجودة في الجداول القياسية (standard tables) – تساوي 0.4244364.

* * *

في كل من المسائل التالية من ٤–٩ إلى ٤–١٣ استخدم طريقة تايلور من الرتبة الرابعة $N = 4$ لإيجاد الحلول التقريبية لمسائل القيمة الابتدائية المعطاة باتباع الخطوات التالية :

أ) احسب قيم $y_1, y_2, \ldots, y_M$ لكل من الحالتين :

(i) $h = 0.2\ ,\ M = 1$ (ii) $h = 0.1\ ,\ M = 2$

ب) قارن الحل المضبوط $y(0.2)$ مع كل من الحلين التقريبيين اللذين حصلت عليهما في (أ). هل لاحظت أن قيمة الخطأ الشامل النهائي FGE في (أ) تتفق مع النتيجة المتوقعة عندما تقل قيمة حجم الخطوة h إلى نصف قيمتها ؟

ج) استخدم حاسوبا لإجراء الحسابات على الفترة الأكبر [a,b] المعطاة.

٤–٩) أ) أوجد حل المسالة IVP :

$$y' = t^2 - y\ ,\quad t \in [0\ ,\ 0.2]\ ,\quad y(0) = 1$$

ب) قارن مع الحل المضبوط : $y(t) = -e^{-t} + t^2 - 2t + 2$

ج) أعد حل المسألة المعطاة في أ) في الفترة :

$$[a\ ,\ b] = [0\ ,\ 2]\ ;\quad h = 0.2\ ,\ 0.1\ ,\ 0.05.$$

٤–١٠) أ) أوجد حل المسألة

$$y' = 3y + 3t\ ;\quad t \in [0\ ,\ 0.2]\ ,\quad y(0) = 1.$$

ب) قارن مع الحل المضبوط

$$y(t) = \frac{4}{3}e^{3t} - t - \frac{1}{3}$$

ج) أعد حل المسألة في الفترة

$[a , b] = [0 , 2] ; \quad h = 0.2 , 0.1 , 0.05.$

٤-١١) أ) أوجد حل المسألة

$y' = -ty , \quad t \in [0 , 0.2] , \quad y(0) = 1.$

ب) قارن مع الحل المضبوط : $y = e^{-t^2/2}$

ج) أعد حل المسألة في الفترة

$[a , b] = [0 , 2] ; \quad h = 0.2 , 0.1 , 0.05.$

٤-١٢) أ) أوجد حل المسألة

$$y' = e^{-2t} - 2y ; \quad t \in [0,0.2], \quad y(0) = \frac{1}{10}$$

ب) قارن مع الحل المضبوط

$$y(t) = \frac{1}{10} e^{-2t} + t . e^{-2t}$$

ج) أعد حل المسألة في الفترة

$[a , b] = [0 , 2] ; \quad h = 0.2 , 0.1 , 0.05.$

٤-١٣) أ) أوجد حل المسألة

$y' = 2ty^2 ; \quad t \in [0 , 0.2] , \quad y(0) = 1.$

ب) قارن مع الحل المضبوط

$y(t) = 1/(1 - t^2) .$

ج) أعد حل المسألة في الفترة

$[a , b] = [0 , 2] ; \quad h = 0.1 , 0.05 , 0.025.$

لاحظ أن طريقة تايلور ستؤدي إلى إيجاد قيمة تقريبية لـ $y(1)$ رغم أن منحنى الحل غير معرَّف عند $t = 1$.

٤-١٤) يمكننا استخدام طريقة ريتشاردسون للتحسين (Richardson improvement method) مع طريقة تايلور. فإذا طبقنا طريقة تايلور من الرتبة الرابعة $N = 4$ بحجم خطوة h وحصلنا على الحل العددي y_h ، فإن

$$y(b) = y_h + Ch^4$$

ثم إذا طبقنا طريقة تايلور من الرتبة الرابعة N = 4 مرة أخرى ولكن هذه المرة بحجم خطوة 2h وحصلنا على الحل العددي y_{2h} فإن

$$y(b) = y_{2h} + 16\,Ch^4$$

والآن يمكننا حذف الحدين اللذين يحتويان على Ch^4 للحصول على قيمة تقريبية أدق (قيمة تقريبية محسنة improved approximation) لـ y(b) ، فنحصل على الصيغة

$$y(b) \approx \frac{16\,y_h - y_{2h}}{15}$$

يمكن استخدام هذه الصيغة التحسينية مع القيم التي حصلنا عليها في مثال ٤-٣ لنحصل على تقريبات أفضل لـ y(3) . أكمل القيم الناقصة في الجدول التالي :

h	y_h	$(16y_h - y_{2h})/15$
1.0	1.6701860	
0.5	1.6694308	-----
0.25	1.6693928	-----
0.125	1.6693906	-----

٤-١٥) اثبت أنه عند استخدام طريقة تايلور من الرتبة N بحجمي خطوة h , $\frac{h}{2}$ ، فإن الخطأ الشامل النهائي FGE يقل – في حالة حجم الخطوة الصغير $(\frac{h}{2})$ – إلى 2^{-N} من قيمته تقريبا ، أي أن نسبة / معامل نقصان الخطأ FGE تساوي تقريبا 2^{-N}) .

(FGE is reduced by a factor of about 2^{-N})

[مثلا في حالة طريقة تايلور من الرتبة الرابعة N = 4 يقل الخطأ FGE إلى $\frac{1}{16}$ من قيمته].

٤-١٦) اثبت أن طريقة تايلور تفشل في إيجاد قيمة تقريبية للحل $y(t)=t^{\frac{3}{2}}$ لمسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t,y) = 1.5\, y^{\frac{1}{3}} \; ; \qquad y(0)=0$$

علل إجابتك موضحا الصعوبات التي تواجه الحل بهذه الطريقة.

٤-١٧) أ) اثبت أن حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = y^2 \; ; \quad t \in [0,1) \;\; , \;\; y(0)=1$$

هو : $y(t) = 1 / (1-t)$

ب) اثبت أن حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = 1+y^2 \; ; \quad t \in [0, \pi/4) \;\; , \;\; y(0)=1$$

هو : $y(t) = \tan(t + \pi/4)$

ج) استخدم نتيجتي أ) ، ب) لإثبات أن حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = t^2 + y^2 \; ; \quad y(0)=1$$

له خط تقاربي رأسي (vertical asymptote) بين $t=1, t=\pi/4$. (موضعه قريب من t=0.96981).

٤-١٨) نفرض أن لدينا مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = 1+y^2 \; ; \quad y(0)=1$$

أ) أوجد تعبيرا لكل من

$$y^{(2)}(t) \;\; , \;\; y^{(3)}(t) \;\; , \;\; y^{(4)}(t)$$

ب) احسب قيم هذه المشتقات عند $t = 0$ ، واستخدم هذه القيم لإيجاد الحدود الخمسة الأولى في مفكوك "ماكلورين" (Maclaurin expansion) للدالة $\tan(t)$.

٤-١٩) الجدول التالي يعطي الحل بطريقة تايلور من الرتبة N=4 لمسألة القيمة الابتدائية

$$y' = t^2 + y^2 \; ; \quad t \in [0, 0.8], \quad y(0)=1$$

ويعرف الحل الصحيح للمسألة عند t = 0.8 بأنه القيمة $y(0.8) = 5.8486168$.

حجم الخطوة Step size, h	عدد الخطوات Number of steps, M	تقريب y(0.8) Approximation to y(0.8), y_M	الخطأ عند t=0.8 Error at t=0.8, $y(0.8) - y_M$
0.05	16	5.8410780	0.0075388
0.025	32	5.8479637	0.0006531
0.0125	64	5.8485686	0.0000482
0.00625	128	5.8486136	0.0000032
0.003125	256	5.8486166	0.0000002

أ) هل تتفق قيم الخطأ الشامل النهائي FGE مع القيم المتوقعة عندما يقل حجم الخطوة إلى نصف قيمته ؟

ب) استخدم طريقة ريتشاردسون للتحسين للحصول على تقريبات أفضل للنتائج.

٢٠-٤) الجدول التالي يعطي قيم الحل بطريقة تايلور من الرتبة الثالثة N=3 لمسألة القيمة الابتدائية

$$y' = t^2 + y^2 \;\; ; \;\; t \in [0, 0.8] \, , \;\; y(0) = 1$$

حجم الخطوة Step size, h	عدد الخطوات Number of steps, M	تقريب y(0.8) Approximation to y(0.8), y_M	الخطأ عند t=0.8 Error at t=0.8, $y(0.8) - y_M$
0.05	16	5.8050504	0.0435664
0.025	32	5.8416192	0.0069976
0.0125	64	5.8476250	0.0009918
0.00625	128	5.8484848	0.0001320
0.003125	256	5.8485998	0.0000170

أ) هل تتفق قيم الخطأ النهائي الشامل FGE مع القيم المتوقعة عندما يقل حجم الخطوة h إلى نصف قيمته ؟

ب) استنتج العلاقات التي تطبق طريقة ريتشاردسون للتحسين عند استخدام طريقة تايلور من الرتبة الثالثة N=3 ، ومن ثم أوجد القيم المحسَّنة للتقريبات المعطاة.

الفصل الخامس

طرق رُونج – كوتَّا
Runge – Kutta Methods

تتميز طرق تايلور التي درسناها في الفصل السابق بأن الخطأ الشامل النهائي FGE يكون من الرتبة order $O(h^N)$ ، ويمكن اختيار قيمة كبيرة لـ N بحيث يصبح هذا الخطأ صغيرا. إلا أن عيب طرق تايلور يتمثل في التحديد الأولي لقيمة N وحساب قيم المشتقات العالية والذي قد يكون بالغ التعقيد . ويتم استنتاج كل طريقة من طرق رونج – كوتا Runge-Kutta (RK) من طريقة مقابلة مناسبة من طرق تايلور بحيث يكون الخطأ الشامل النهائي FGE من الرتبة $O(h^N)$. وفي مقابل تمكننا من إلغاء ضرورة حساب قيم المشتقات العالية نقوم بحساب عدة قيم للدالة عند كل خطوة step من خطوات الطريقة. ويمكن الحصول على قوانين طرق رونج–كوتا (RK) لأي رتبة N ، وتعد طريقة رونج–كوتا من الرتبة الرابعة N = 4 (RK4) أكثر هذه الطرق استخداما ، فهي تعد اختيارا مناسبا للتطبيقات العامة نظرا لما تتمتع به من درجة عالية من حيث الدقة (accuracy) والاستقرار (stability) وسهولة البرمجة (easy to program) . وعادة لا نفضل اللجوء إلى طريقة ذات رتبة أعلى نظراً لأن الدقة الأعلى التي سنصل إليها ستكون مقابل جهد كبير يُبذل في إجراء حسابات كثيرة إضافية. فإذا أردنا الوصول إلى دقة أعلى فيمكننا استخدام قيمة أصغر لحجم الخطوة.

فطرق رونج–كوتا تعد من أكثر الطرق استخداما ، وبصورة خاصة ون أكثر مناسبة للاستخدام عندما يكون حساب المشتقات الكبيرة (≤٢) معقدا. وأي طريقة RK هي إجراء أحادي الخطوة (one-step procedure) يشتمل على حساب مشتقات من الرتبة الأولى فقط (first-order derivative

(evaluations ، ويعطي نتائج مكافئة في دقتها لطرق تايلور ذوات الرتب الأعلى (higher-order Taylor formulas).

وطرق رونج–كوتا من الرتب الثانية والثالثة والرابعة (أي التي تعطي تقريبات مكافئة في دقتها لمفكوكات تايلور لـ y(t) التي تحتفظ بحدود حتى h^4, h^3, h^2 على الترتيب) تتطلب حساب قيم f(t,y) عند قيمتين وثلاث وأربع قيم – على الترتيب – للمتغير t على الفترة $[t_k , t_{k+1}]$. وأما طرق RK من الرتبة m ، حيث $m > 4$ فإنها تتطلب حساب المشتقة عند أكثر من m نقطة (متجاورة).

ومن عيوب طرق RK صعوبة تقدير الخطأ (estimation of the error) ، بالإضافة إلى عدم إمكانية التحقق من النتيجة بطريقة ميسرة.

والصيغة العامة لخوارزميات جميع طرق RK هي :

$$y_{k+1} = y_k + h\phi\,(t_k , y_k , h)$$

حيث ϕ – ويطلق عليها دالة الزيادة (increment function) – هي تقريب (يتم اختياره بصورة مناسبة) للدالة f(t,y) على الفترة $[t_k , t_{k+1}]$. ونلقي فيما يلي بعض الضوء على كيفية اختيار الدالة ϕ.

طرق رونج–كوتا من الرتبة الثانية (N=2):

في طريقة أويلر نعامل المشتقة $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ كما لو كانت ثابتة القيمة خلال خطوة واحدة h وتساوي قيمتها عند بداية هذه الخطوة. وقد تكون هناك قيمة متوسطة للمشتقة (average derivative) أكثر مناسبة للاستخدام ومتوفرة لدينا وذلك بين t_k , t_{k+1} . إذا فرضنا أننا قد عرفنا قيمتي $y(t_k)$, $y(t_{k+1})$ فإنه يمكننا تقدير قيمة متوسطة للمشتقة كمتوسط قيمتي المشتقة عند بداية ونهاية الخطوة:

$$\bar{f} = \frac{1}{2}\left[f(t_k, y(t_k)) + f(t_{k+1}, y(t_{k+1})) \right] \qquad (1)$$

غير أن القيمتين المضبوطتين (exact values) $y(t_k)$, $y(t_{k+1})$ غير معلومتين ، ولذلك فإننا نقرِّب العلاقة (1) إلى الصيغة :

$$\bar{f} = \frac{1}{2}\left[f(t_k, y_k) + f\left(t_{k+1}, y^*_{k+1} \right) \right] \qquad (2)$$

حيث y_k هي قيمة y المحسوبة عند بداية الخطوة ، و y^*_{k+1} هي تقدير مبدئي (preliminary estimate) لقيمة y عند نهاية الخطوة. وإحدى طرق تقدير قيمة y^*_{k+1} هي استخدام قانون أويلر :

$$y^*_{k+1} = y_k + h\, f(t_k, y_k) \qquad (3)$$

ونحصل على التقريب النهائي (final approximation) – أي القيمة العددية / المحسوبة (computed / numerical value) – y_{k+1} عند نهاية الخطوة بتطبيق طريقة أويلر مرة أخرى ، ولكن هذه المرة باستخدام المشتقة المتوسطة $\bar{f}$:

$$y_{k+1} = y_k + h\, \bar{f} \qquad (4)$$

وبالتالي تكون الخوارزمية الكاملة للتقدم من t_k إلى t_{k+1} هي:

(i) احسب التقريب الأولى (first approximation):

$$y^*_{k+1} = y_k + h\, f(t_k, y_k)$$

(ii) احصل على المشتقة المتوسطة (average derivative):

$$\bar{f} = \frac{1}{2}\left[f(t_k, y_k) + f\left(t_{k+1}, y^*_{k+1} \right) \right]$$

(iii) احسب التقريب النهائي (final approximation):

$$y_{k+1} = y_k + h\, \bar{f}$$

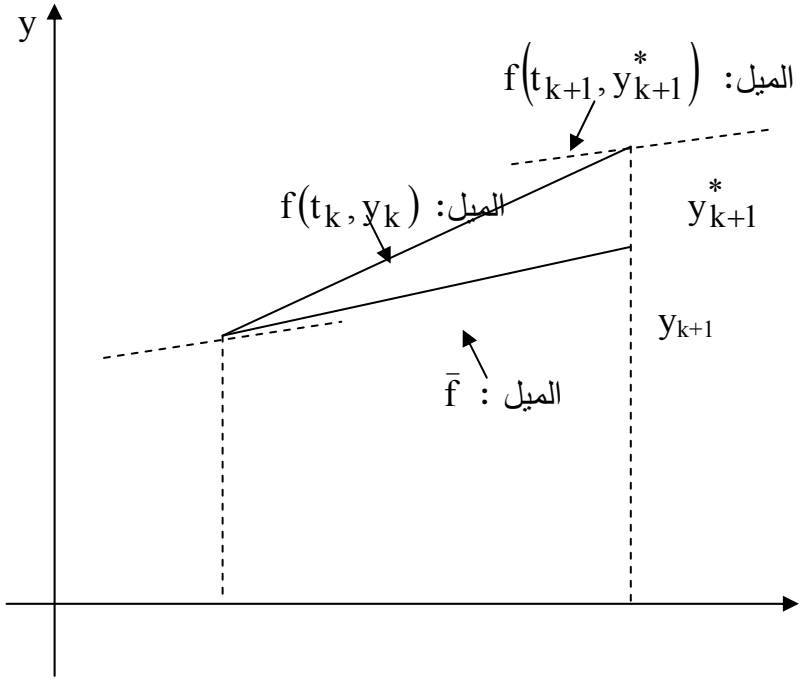
ملاحظات:

* هذا الإجراء يعرف باسم طريقة أويلر المحسَّنة (improved Euler method) ، أو طريقة هوين (Heun's method) ، [وهي التي

درسناها في الفصل الثالث] أو طريقة رونج – كوتا من الرتبة الثانية (second-order RK).

* هذه الخوارزمية (iii) → (i) هي مثال بسيط لما يطلق عليه طريقة التنبؤ والتصحيح (predictor-corrector method) – والتي سندرسها بإذن الله في الفصل القادم – حيث أن التقريب المتنبأ الأَوَّلي y^*_{k+1} (first predicted approximation) يصحَّح / يحسَّن / يُنقَّح (refined) ليعطِي التقريب المصحح النهائي (final corrected approximation) y_{k+1} .

* الشكل التالي يوضح هذه الخوارزمية.



شكل ٥–١

وفـي إجـراء آخـر شـبيه نتقـدم إلـى النقطـة $\left(t_{k+\frac{1}{2}} , y^*_{k+\frac{1}{2}} \right)$ فـي منتصف الخطوة (halfway point) باستخدام طريقة أويلر ، ثم نأخذ قيمة f عند هذه النقطة لتكون هي $\bar{f}$ كما يلي:

(i) احسب قيمة التقريب عند نقطة المنتصف

$$y^*_{k+\frac{1}{2}} = y_k + \frac{h}{2} f\left(t_k, y_k\right)$$

(ii) احسب قيمة المشتقة المتوسطة

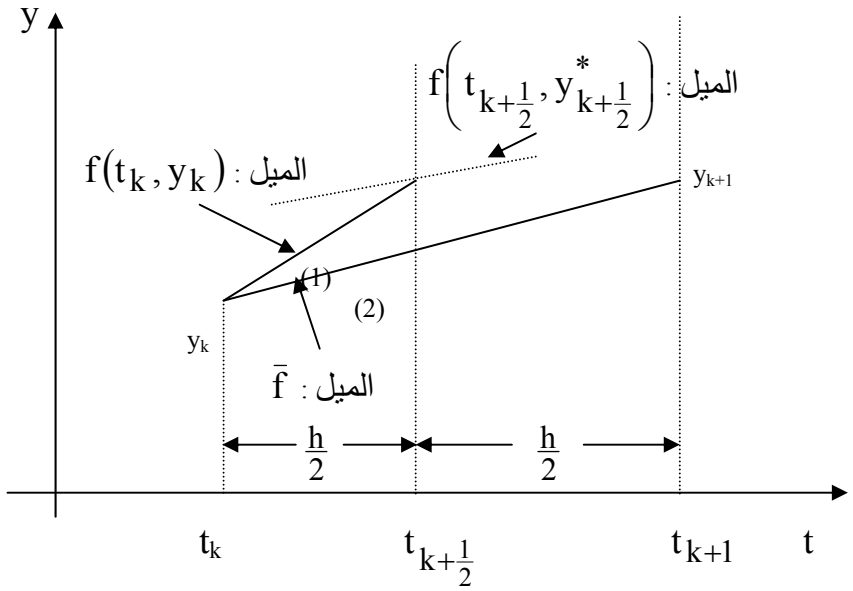
$$\bar{f} = f\left(t_{k+\frac{1}{2}}, y^*_{k+\frac{1}{2}} \right)$$

(iii) تقدم إلى نهاية الخطوة

$$y_{k+1} = y_k + h\,\bar{f}$$

وهذا الإجراء يعرف باسم طريقة أويلر – كوشي المعدَّلَة (modified Euler – Cauchy method).

والشكل التالي يوضح هذه الخوارزمية.



شكل ٥-٢

ملاحظات:

*) كل من الطريقتين السابقتين تسمى إجراء من الرتبة الثانية (second order procedure) ، وذلك لأنه يمكن إثبات أن خطأ الاقتطاع الكلي المصاحب لأي منهما (associated overall truncation error) هو $O(h^2)$ [أي أنه يتناسب طرديا مع h^2 عندما تؤول h إلى الصفر $(E \alpha h^2 \text{ as } h \to 0)$] ، وهذا يمثل ميزة واضحة distinct advantage) لأي من هاتين الطريقتين إذا قورنت بطريقة أويلر.

*) الطرق السابقة تُعَد حالات خاصة من المجموعة العامة من الطرق التي يطلق عليها: إجراءات رونج – كوتا(Runge - Kutta procedures ، والتي تذهب جميعها إلى أطوال متعددة لحساب قيمة مناسبة للمشتقة المتوسطة $\bar{f}$ (average derivative) على الفترة h. وتعد العلاقات الرياضية الخاصة بطرق RK من الرتب العالية (> ٢) – أي الطرق ذوات أخطاء الاقتطاع الصغيرة – علاقات رياضية معقدة. وعموما فإن حساب قيمة $\bar{f}$ يشتمل على خطوات وحسابات أكثر كلمات زادت دقة الطريقة.

فيما يلي نعطي الاستنتاج / الإثبات الرياضي (mathematical derivation) للخوارزميتين السابقتين من الرتبة الثانية. ويمكن استنتاج طرق RK ذوات الرتب الأعلى بطريقة مماثلة.

نفرض أن ϕ : متوسط موزون (weighted average) لقيمتي مشتقتين k_1, k_2 على الفترة $[t_k, t_{k+1}]$ ، أي أن:

$$\phi = a\, k_1 + b\, k_2$$

حيث

$$k_1 = f(t_k , y_k).$$

$$k_2 = f(t_k + ph , y_k + q\, h\, f(t_k , y_k))$$

$$\equiv f(t_k + ph , y_k + q\, h\, k_1)$$

حيث q , p ثابتان يتم تحديد قيمتيهما فيما بعد. وهذا يؤدى إلى خوارزمية RK:

$$y_{k+1} = y_k + h\,\phi$$
$$\Rightarrow \quad y_{k+1} = y_k + h\,(a\,k_1 + b\,k_2)$$

ويتم تحديد قيم المجاهيل a , b , p , q باتباع الخطوات التالية:

- اكتب مفكوك k_2 باستخدام متسلسلة تايلور لدالة في متغيرين ، مع إهمال جميع الحدود التي تحتوي على قوى h الأكبر من الواحد وبالتالي نحصل على مفكوك تايلور لـ y_{k+1} حتى h^2.
- اكتب مفكوك $y(t_{k+1}) \equiv y(t_k + h)$ بمتسلسلة تايلور حول t_k وحتى h^2.
- بمساواة الحدود ذوات قوى h المتماثلة $\left(h^0, h^1, h^2\right)$ في مفكوكي $y(t_{k+1})$, y_{k+1} السابقين نحصل على ثلاث معادلات في أربعة مجاهيل ، وبذلك يمكننا تحديد قيمة اختيارية لأحد المجاهيل (ملاحظة: الاختيار $b = \frac{1}{2}$ يعطي الخوارزمية الأولى " طريقة هوين / أويلر المحسَّنة " ، والاختيار $b = 1$ يعطي الخوارزمية الثانية " طريقة أويلر – كوشي المعدَّلة ").

ملاحظة :

مفكوك تايلور لدالة في متغيرين يعطى بالعلاقة التالية :

$$f(x+\alpha, y+\beta) = f(x,y) + \alpha f_x(x,y) + \beta f y(x,y) + \frac{1}{2}\left[\alpha^2 f_{xx}(x,y) + 2\alpha\beta f_{xy}(x,y) + \beta^2 f_{yy}(x,y)\right] + O\left[\left(|\alpha| + |\beta|\right)^3\right].$$

$$k_2 = f(t_k + p\,h\,,\, y_k + q\,h\,f\,(t_k\,,\, y_k))$$
$$= f(t_k\,,\, y_k) + p\,h\,f_t(t_k\,,\, y_k)$$
$$+ qhf(t_k\,,\, y_k).\,f_y(t_k\,,\, y_k) + O(h^2)$$
$$y_{k+1} = y_k + h(ak_1 + bk_2);\quad k_1 \equiv f(t_k, y_k),$$
$$= y_k + h\,(a\,f\,(t_k\,,\, y_k) + b\,f\,(t_k\,,\, y_k))$$
$$+ h^2\,(b\,p\,f_t\,(t_k\,,\, y_k) + b\,q\,f\,(t_k\,,\, y_k).\,f_y\,(t_k\,,\, y_k))$$
$$+ O\,(h^3)$$
$$y\,(t_{k+1}) = y\,(t_k + h) = y\,(t_k) + h\,f\,(t_k, y(t_k))$$
$$+ \frac{h^2}{2} f'(t_k, y(t_k)) + \frac{h^3}{3!} f''(\xi, y(\xi));$$
$$t_k < \xi < t_{k+1}$$
$$= y\,(t_k) + h\,f\,(t_k\,,\, y(t_k))$$
$$+ \frac{h^2}{2}\left[f_t(t_k, y(t_k)) + f_y(t_k, y(t_k)).\,f(t_k, y(t_k)\right]$$
$$+ \frac{h^3}{3!} f''(\xi, y(\xi))$$

وبمساواة معاملات قوى h المختلفة في مفكوكي $y(t_{k+1})$ ، y_{k+1} نحصل على العلاقات التالية:

$$h^0 :\quad y_k = y(t_k)$$
$$h^1 :\quad (a+b) f(t_k, y_k) = f(t_k, y(t_k))$$
$$h^2 :\quad bpf_t(t_k, y_k) + bqf_y(t_k, y_k).\,f(t_k, y_k) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[f_t(t_k, y(t_k)) + f_y(t_k, y(t_k)).\,f(t_k, y(t_k))\right.$$

بفرض أن $y_k = y(t_k)$ ، وأننا نريد تساوي معاملي h^2 لجميع الدوال القابلة للتفاضل المناسبة $f(t, y)$ ، فإننا نحصل على :

$$a + b = 1$$
$$b\,p = \frac{1}{2}$$

$$b\,q = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad a + b = 1; \quad p = q = \frac{1}{2b}$$

أي أصبح لدينا ٣ معادلات في ٤ مجاهيل. فيمكننا تحديد أي قيمة اختيارية لأحد هذه المجاهيل ، وليكن b.

(i) الاختيار الأول

$$b = \frac{1}{2} \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}, \quad p = q = 1 \Rightarrow$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(t_k, y_k) + f(t_k + h, y_k + hf(t_k, y_k)]$$

وهذه العلاقة يمكن كتابتها في الصورة التالية:

$$y_{k+1} = y_k + h\,\bar{f} \qquad (5)$$

حيث

$$\bar{f} = \frac{1}{2}\left[f(t_k, y_k) + f\left(t_{k+1}, y^*_{k+1}\right)\right] \qquad (6)$$

حيث

$$y^*_{k+1} = y_k + h\,f(t_k, y_k) \qquad (7)$$

أي أننا نحصل على طريقة أويلر المحسَّنة / طريقة هوين / طريقة تنبؤ وتصحيح.

ملاحظة:

يمكن أن ننظر للعلاقة (7) على أنها معادلة تنبؤ (predicting equation) لـ $y^{*(1)}_{k+1}$ (أي التقريب الأول لقيمة y_{k+1}) ، ومن المعادلتين (6) ، (5) فإن المعادلة

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(t_k, y_k) + f\left(t_k, y^*_{k+1}\right)\right]$$

يمكن أن تستخدم تكراريا (iteratively) لتعطي متتالية (sequence) من قيم y_{k+1} المصححة (corrected values) :

$$y^{*(2)}_{k+1},\ y^{*(3)}_{k+1}, \cdots,\ y^{*(m)}_{k+1},\ y_{k+1}$$

(ii) الاختيار الثاني

$$b = 1 \Rightarrow a = 0, \quad p = q = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$y_{k+1} = y_k + h(ak_1 + bk_2)$$

$$= y_k + h\left(a\, f(t_k, y_k) + b\, f\left(t_k + ph, y_k + qhf(t_k, y_k)\right)\right)$$

$$y_{k+1} = y_k + h\, f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f(t_k, y_k)\right)$$

وهذه العلاقة يمكن كتابتها في الصورة التالية:

$$y_{k+1} = y_k + h\,\bar{f} \qquad (8)$$

حيث

$$\bar{f} = f\left(t_{k+\frac{1}{2}}, y^*_{k+\frac{1}{2}}\right) \qquad (9)$$

حيث

$$y^*_{k+\frac{1}{2}} = y_k + \frac{h}{2} f(t_k, y_k) \qquad (10)$$

وهذه هي خوارزمية أويلر – كوشي المعدَّلة.

ويمكننا استنتاج طرق RK ذوات الرتب الأعلى بطريقة مماثلة.

طريقة رونج – كوتا العامة من الرتبة النونية
(General n^{th} order RK method)

الصيغة العامة لهذه الطريقة هي:

$$y_{k+1} = y_k + h\,\phi,$$

حيث

$$\phi = w_1 k_1 + w_2 k_2 + \ldots + w_n k_n,$$

حيث

$$k_1 = f(t_k, y_k)$$
$$k_2 = f(t_k + \alpha_2 h, y_k + \beta_{21} h k_1)$$
$$k_3 = f(t_k + \alpha_3 h, y_k + \beta_{31} h k_1 + \beta_{32} h k_2)$$
$$k_4 = f(t_k + \alpha_4 h, y_k + \beta_{41} h k_1 + \beta_{42} h k_2 + \beta_{43} h k_3)$$
$$\vdots$$
$$k_n = f(t_k + \alpha_n h, y_k + \beta_{n1} h k_1 + \beta_{n2} h k_2 + \cdots + \beta_{n,n-1} h k_{n-1})$$

أي أن $k_1, k_2, \cdots, k_n$ هي تقريبات للمشتقات عند نقاط مختلفة على فترة التكامل $[t_k, t_{k+1}]$. ولتحديد الثوابت

w_i , α_j , β_{kl} $(i=1,2,\ldots,n\ ;\ j=2,3,\ldots,n\ ;\ k=2,3,\ldots,n\ ;$
$i=2,3,...,n\ ;\ \ell=1,2,...,n\ ;\ 1 \le \ell < k \le n)$

(وعدد هذه الثوابت $\frac{n^2+3n-2}{2}$) :

(أ) أوجد مفكوك متسلسلة تايلور لكل من $k_1, k_2, \cdots, k_n$ حول (t_k, y_k) كدالة في متغيرين ، ثم عوض هذه المفكوكات في معادلة y_{k+1} .

(ب) أوجد مفكوك $y(t_{k+1}) = y(t_k + h)$ كمتسلسلة تايلور حول t_k .

(ج) بمساواة معاملات قوى h المختلفة حتى h^n في مفكوكي $y(t_{k+1})$, y_{k+1} نحصل على عدد من المعادلات في عدد أكبر من المجاهيل ، ولذا فإننا نضع قيما اختيارية لبعض المجاهيل ونعين قيم المجاهيل الأخرى.

طريقة رونج – كوتا من الرتبة الثالثة (RK3)

لمجموعة معينة من الثوابت تصبح الصيغة العامة لطريقة RK من الرتبة الثالثة :

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(f_1 + 4f_2 + f_3);$$

حيث

$$f_1 = f(t_k, y_k)$$
$$f_2 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{1}{2} h f_1\right)$$
$$f_3 = f(t_k + h, y_k + 2 h f_2 - h f_1)$$

يلاحظ أنه إذا كانت $f(t , y)$ دالة في t فقط ، فإن هذه الطريقة RK3 تؤول إلى قاعدة سمبسون :

$$y_{k+1} - y_k = \frac{h}{6}\left(f(t_k) + 4f\left(t_k + \frac{h}{2}\right) + f(t_k + h)\right)$$

$$\left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{dy}{dt}\, dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)\, dt \right]$$

طريقة رونج – كوتا من الرتبة الرابعة

أكثر طرق RK استخداما هي طريقة RK من الرتبة الرابعة [أي أن خطأ الاقتطاع المحلي في حدود $O(h^5)$ ، أو أن خطأ الاقتطاع الكلي في حدود $O(h^4)$ ، أي أن دقة هذه الطريقة مكافئة لدقة طريقة تايلور من الرتبة الرابعة] . وقد اقتُرحت عدة طرق من هذه الرتبة الرابعة ، كل منها تستخدم مجموعة مختلفة من الوسطاء / الثوابت (parameters / constants) ، وذلك لتحقيق بعض المميزات. وهناك طريقتان من أكثر هذه الطرق استخداما ، إحداهما تُنسب إلى " رونج " (Runge) والأخرى تنسب إلى "جِل" (Gill) . ولعل الطريقة التي تستخدم ثوابت " جِل " هي أكثر الطرق أحادية الخطوة (single step methods) استخداما لحل المعادلات التفاضلية العادية. وكانت ثوابت جِل قد اختيرت أساسا لتقليل الحيز المؤقت (temporary storage) المطلوب لحل نظم المعادلات أحادية الرتبة ذات الحجم الكبير (sizeable systems of first-order equations).

(i) طريقة RK من الرتبة الرابعة باستخدام ثوابت رونج:

وسنطلق عليها طريقة RK القياسية (standard RK method) أو طريقة RK4.

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4)$$

حيث

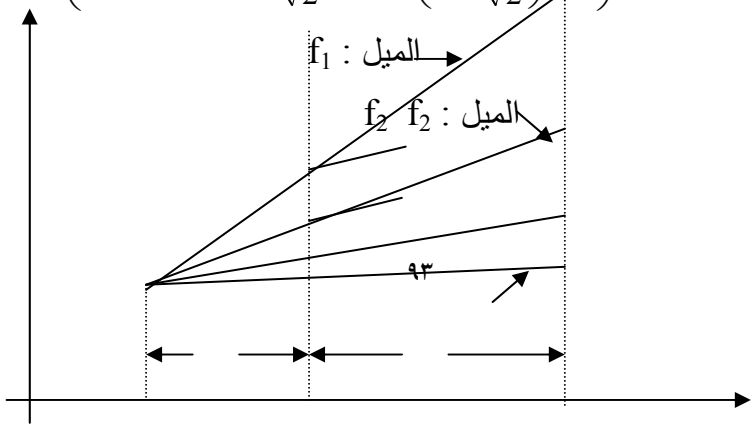
$$f_1 = f(t_k, y_k)$$
$$f_2 = f\left(t_k + \frac{1}{2}h\,,\, y_k + \frac{1}{2}hf_1\right)$$
$$f_3 = f\left(t_k + \frac{1}{2}h\,,\, y_k + \frac{1}{2}hf_2\right)$$
$$f_4 = f(t_k + h\,,\, y_k + hf_3)$$

ولاحظ مرة أخرى أن هذه الطريقة تؤول إلى قاعدة سمبسون عندما تكون $f(t,y)$ دالة في t فقط:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\left(f(t_k) + 2f\left(t_k + \frac{1}{2}h\right) + 2f\left(t_k + \frac{1}{2}h\right) + f(t_k + h)\right)$$
$$= y_k + \frac{h}{6}\left(f(t_k) + 4f\left(t_k + \frac{1}{2}h\right) + f(t_k + h)\right).$$

(ii) طريقة RK من الرتبة الرابعة باستخدام ثوابت جِـــــــــل:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\left(f_1 + 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)f_2 + 2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)f_3 + f_4\right),$$
$$f_1 = f(t_k, y_k)$$
$$f_2 = f\left(t_k + \frac{1}{2}h\,,\, y_k + \frac{1}{2}hf_1\right)$$
$$f_3 = f\left(t_k + \frac{1}{2}h\,,\, y_k + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)hf_1 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)hf_2\right)$$
$$f_4 = f\left(t_k + h\,,\, y_k - \frac{1}{\sqrt{2}}hf_2 + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)hf_3\right)$$



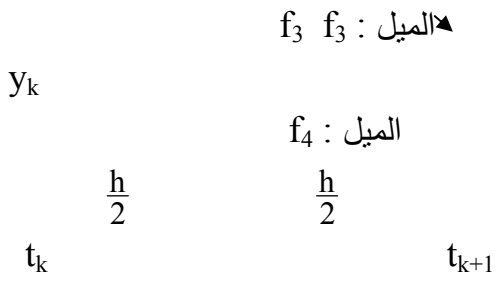
الميل : f_3 f_3

y_k

الميل : f_4

$\frac{h}{2}$ $\frac{h}{2}$

t_k t_{k+1}



شكل ٥-٣

وأساس طريقة رونج – كوتا من الرتبة الرابعة هو حساب قيمة y_{k+1} باستخدام العلاقة التالية:

$$y_{k+1} = y_k + w_1k_1 + w_2k_2 + w_3k_3 + w_4k_4 , \qquad (11)$$

حيث :

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_k, y_k), \\ k_2 &= hf(t_k + a_1h , y_k + b_1k_1), \\ k_3 &= hf(t_k + a_2h , y_k + b_2k_1 + b_3k_2), \\ k_4 &= hf(t_k + a_3h , y_k + b_4k_1 + b_5k_2 + b_6k_3). \end{aligned} \qquad (12)$$

وبمقارنة المعاملات مع معاملات طريقة متسلسلة تايلور من الرتبة الرابعة $N = 4$ حتى يكون خطأ الاقتطاع المحلي من الرتبة $O(h^5)$ ، حصل رونج وكوتا على نظام المعادلات (system of equations) التالي:

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1, \\ b_2 + b_3 &= a_2, \\ b_4 + b_5 + b_6 &= a_3, \\ w_1 + w_2 + w_3 + w_4 &= 1, \\ w_2a_1 + w_3a_2 + w_4a_3 &= \tfrac{1}{2}, \\ w_2a_1^2 + w_3a_2^2 + w_4a_3^2 &= \tfrac{1}{3}, \\ w_2a_1^3 + w_3a_2^3 + w_4a_3^3 &= \tfrac{1}{4}, \\ w_3a_1b_3 + w_4(a_1b_5 + a_2b_6) &= \tfrac{1}{6}, \end{aligned} \qquad (13)$$

$$w_3 a_1 a_2 b_3 + w_4 a_3 (a_1 b_5 + a_2 b_6) = \frac{1}{8},$$
$$w_3 a_1^2 b_3 + w_4 (a_1^2 b_5 + a_2^2 b_6) = \frac{1}{12},$$
$$w_4 a_1 b_3 b_6 = \frac{1}{24},$$

ويحتوى هذا النظام على ١١ معادلة في ١٣ متغير / مجهول:

$$a_1, a_2, a_3, \quad b_1, b_2, \ldots, b_6, \quad w_1, w_2, w_3, w_4$$

ونحتاج لشرطين إضافيين لحل هذا النظام. وقد وجد أن الشرطين التاليين هما من أفيد الاختيارات (ويؤديان إلى ثوابت رونج) :

$$a_1 = \frac{1}{2}, \qquad b_2 = 0 \qquad (14)$$

وبالتالي يؤدي حل النظام إلى القيم التالية لباقي المتغيرات:

$$a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = 1,\ b_1 = \frac{1}{2},\ b_3 = \frac{1}{2},\ b_4 = 0,\ b_5 = 0,\ b_6 = 1,$$
$$w_1 = \frac{1}{6},\ w_2 = \frac{1}{3},\ w_3 = \frac{1}{3},\ w_4 = \frac{1}{6}. \qquad (15)$$

وبتعويض القيم المعطاة في (15) , (14) في العلاقات المذكورة في (11) , (12) نحصل على صيغة طريقة رونج – كوتا القياسية (standard R-K method) من الرتبة الرابعة N = 4 ، والتي نلخصها فيما يلي:

- ابدأ بالنقطة الابتدائية (t_0 , y_0) (initial point)
- قم بتوليد متتالية التقريبات (sequence of approximations):

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4)}{6} \qquad (16)$$

حيث

$$
\begin{aligned}
f_1 &= f(t_k\,,\ y_k),\\
f_2 &= f\left(t_k+\frac{h}{2}\,,\ y_k+\frac{h}{2}f_1\right),\\
f_3 &= f\left(t_k+\frac{h}{2}\,,\ y_k+\frac{h}{2}f_2\right),\\
f_4 &= f(t_k+h\,,\ y_k+hf_3).
\end{aligned}
\qquad (17)
$$

مثال ٥-١:

باستخدام طريقة رونج – كوتا القياسية RK4 أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = 1+y^2\,;\quad t\in[0\,,0.4],\quad y(0) = 0$$

متخذا حجم الخطوة $h = 0.2$.

الحل :

أولا : حساب y_1 من y_0 .

$$t_0 = 0,\quad y_0 = 0,\quad t_1 = 0.2,\quad y_1 = ?$$

$$f_1 = f(t_0\,,\ y_0) = f(0\,,0) = 1+0 = 1$$

$$f_2 = f(0.1\,,0.1) = 1+0.01 = 1.01$$

$$f_3 = f(0.1\,,0.101) = 1+(0.101)^2 = 1.010201$$

$$f_4 = f(0.2\,,0.2*1.010201) = 1+(0.2020402)^2 = 1.0408202$$

$$y_1 = 0+\frac{0.2}{6}(1+2.02+2.020402+1.0408202) = 0.2027074$$

ثانيا : حساب y_2 من y_1 .

$$t_1 = 0.2,\quad y_1 = 0.2027074,\quad t_2 = 0.4,\quad y_2 = ?$$

$$f_1 = f(t_1, y_1) = f(0.2, 0.2027074) = 1.0410903$$
$$f_2 = f(0.2 + 0.1, 0.2027074 + 0.1*1.0410903) = 1.0941363$$
$$f_3 = f(0.3, 0.2027074 + 0.1*1.0941363) = 1.0974195$$
$$f_4 = f(0.4, 0.2027074 + 0.2*1.0974195) = 1.1782455$$
$$y_2 = 0.2027074 + \frac{0.2}{6}[1.0410903 + 2*1.0941363 + 2*1.0974195 + 1.1782455] = 0.4227889$$

ملاحظة :

لإيجاد الحل المضبوط :

$$\frac{dy}{1+y^2} = dt \quad \Rightarrow \quad \tan^{-1} y = t + c \quad \Rightarrow \quad 0 = 0 + c \quad \Rightarrow$$

$$c = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan^{-1} y = t \quad \Rightarrow \quad y = \tan t$$
$$\Rightarrow \quad y(0.2) = \tan 0.2 = 0.2027099$$

$$\text{Error} \quad E_1 = 0.0000025 = 0.25*10^{-5}$$

أي أن هناك خمسة أرقام عشرية صحيحة (5 correct decimals).

$$y(0.4) = \tan 0.4 = 0.4227931$$

$$\text{Error} \quad E_2 = 0.0000042 = 0.42*10^{-5}$$

أي أن هناك خمسة أرقام عشرية صحيحة (5 correct decimals).

مناقشة طريقة رونج – كوتا القياسية :

إذا نظرنا إلى منحنى الحل (solution curve) y = y(t) خلال الفترة الجزئية الأولى $[t_0 , t_1]$ فإننا نلاحظ أن قيم الدالة (function values) في المعادلات (17) هي تقريبات (approximations) لقيم الميل (slopes) لهذا المنحنى. (انظر شكل ٥-٤-أ):

f_1 : الميل عند جهة اليسار

f_2 , f_3 : تقديران للميل عند الوسط

f_4 : الميل عند جهة اليمين

ويمكننا الحصول على النقطة التالية (t_1 , y_1) بمكاملة دالة الميل

$$y(t_1) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, y(t))\, dt . \qquad (18)$$

فإذا طبقنا قاعدة سمبسون (Simpson's rule) بحجم خطوة h/2 فإننا نحصل على العلاقة التالية التي تعطي قيمة تقريبية للتكامل في (18):

(أ)

قيم الميل المتوقعة m_j (predicted slopes) لمنحنى الحل $y = y(t)$

(ب)

تقريب التكامل (integral approximation) :

$$y(t_1) - y_0 = \frac{h}{6}(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4)$$

(ب) (أ)

شكل ٥-٤

(أ) المنحنى $y = y(t)$

(ب) المنحنى $z = f(t , y(t))$

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t , y(t))\, dt \approx \frac{h}{6}\left[f(t_0 , y(t_0)) + 4f(t_{1/2} , y(t_{1/2})) + f(t_1 , y(t_1))\right], \qquad (19)$$

حيث $t_{1/2}$ هي نقطة منتصف الفترة (midpoint of the interval).
ونحتاج هنا لثلاث قيم للدالة ، وسنقوم بإجراء الاختيارات التالية:

$$f(t_0 , y(t_0)) = f_1$$
$$f(t_1 , y(t_1)) \approx f_4$$
$$f(t_{1/2} , y(t_{1/2})) \approx \frac{f_2+f_3}{2}$$

وبتعويض هذه القيم في العلاقة (19) ، والتي تُستخدم بدورها في المعادلة (18) نحصل على y_1 :

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}\left[f_1 + \frac{4(f_2+f_3)}{2} + f_4 \right] \qquad (20)$$

وبتبسيط هذه الصيغة نحصل على العلاقة (16) حيث $k = 0$. ويبين شكل ٥-٤-(ب) منحنى التكامل الوارد في العلاقة (19).

العلاقة بين حجم الخطوة والخطأ

(Step Size versus Error)

حد الخطأ (error term) في قاعدة سمبسون حيث حجم الخطوة يساوي h/2 يعطى بالصيغة :

$$-y^{(4)}(c_1)\frac{h^5}{2880} \qquad (21)$$

فإذا كان الخطأ الوحيد في كل خطوة هو هذا الخطأ المعطى في (21) ، فبعد عدد M من الخطوات يكون الخطأ المتراكم (accumulated error) في طريقة RK4 هو :

$$-\sum_{k=1}^{M} y^{(4)}(c_k)\,\frac{h^5}{2880} \approx \frac{b-a}{5760}\, y^{(4)}(c)h^4 \approx O(h^4). \qquad (22)$$

النظرية التالية تحدد العلاقة بين الخطأ الشامل النهائي FGE وحجم الخطوة ، وهي تستخدم لإعطاء فكرة عن مدى الجهد المطلوب بذله في إجراء الحسابات عند استخدام طريقة RK4.

نظرية ٥-١ (دقة طريقة رونج – كوتا)

(Precision of Runge – Kutta Method)

نفـرض أن y(t) هـي حـل مسـألة القيمـة الابتدائيـة. إذا كانـت $y(t) \in C^5[t_0, b]$ وكانت

$$\{(t_k, y_k)\}; k = 0,1,2,\cdots,M$$

هي متتابعة التقريبات (sequence of approximations) التي تولدها طريقة RK4 فإن :

$$\begin{aligned} |e_k| &= |y(t_k) - y_k| = O(h^4). \\ |\epsilon_{k+1}| &= |y(t_{k+1}) - y_k - hT_n(t_k, y_k)| = O(h^5). \end{aligned} \quad (23)$$

وأما الخطأ الشامل النهائي FGE عند نهاية الفترة فإنه يحقق العلاقة

$$E(y(b), h) = |y(b) - y_M| = O(h^4). \quad (24)$$

المثالان التاليان (مثال ٥-٢ ، مثال ٥-٣) يوضحان نظرية ٥-١. وإذا فرضنا أن التقريبات ستحسب باستخدام حجمي خطوة h , h/2 ، فإننا نحصل على كل من العلاقتين:

$$E(y(b), h) \approx Ch^4. \quad (25)$$

(لحجم الخطوة الكبير h) ،

$$E\left(y(b), \frac{h}{2}\right) \approx C\frac{h^4}{16} \approx \frac{1}{16}Ch^4 \approx \frac{1}{16}E(y(b), h). \quad (26)$$

وبالتالي فإن فكرة نظرية ٥-١ هي أنه إذا تم تقليل حجم الخطوة في طريقة RK4 إلى نصف قيمته فإننا نتوقع أن يقل الخطأ الشامل النهائي الكلي overall FGE إلى $\frac{1}{16}$ من قيمته.

مثال ٥-٢:

استخدم طريقة RK4 لحل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = (t - y)/2\,; \qquad t \in [0,3], \qquad y(0) = 1$$

قارن بين الحلول لقيم حجم الخطوة $h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$

الحل :

الجدول التالي يعطي قيم الحل عند بعض النقاط المختارة. وكمثال على طريقة إجراء الحسابات نوضح فيما يلي كيفية إيجاد قيمة y_1 عندما يكون حجم الخطوة $h = 0.25$.

$$f_1 = \frac{0.0 - 1.0}{2} = -0.5\,,$$

$$f_2 = \frac{0.125 - [1 + 0.25(0.5)(-0.5)]}{2} = -0.40625\,,$$

$$f_3 = \frac{0.125 - [1 + 0.25(0.5)(-0.40625)]}{2} = -0.4121094\,,$$

$$f_4 = \frac{0.25 - [1 + 0.25(-0.4121094)]}{2} = -0.3234863\,,$$

$$y_1 = 1.0 + 0.25\ \frac{-0.5 + 2(-0.40625) + 2(-0.4121094) - 0.3234863}{6}$$

$$= 0.8974915\,.$$

t_k	y_k				$y(t_k)$ Exact
	h=1	$h = \frac{1}{2}$	$h = \frac{1}{4}$	$h = \frac{1}{8}$	
0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.125				0.9432392	0.9432392
0.25			0.8974915	0.8974908	0.8974917
0.375				0.8620874	0.8620874
0.50		0.8364258	0.8364037	0.8364024	0.8364023
0.75			0.8118696	0.8118679	0.8118678
1.00	0.8203125	0.8196285	0.8195940	0.8195921	0.8195920
1.50		0.9171423	0.9171021	0.9170998	0.9170997
2.00	1.1045125	1.1036826	1.1036408	1.1036385	1.1036383
2.50		1.3595575	1.3595168	1.3595145	1.3595144
3.00	1.6701860	1.6694308	1.6693928	1.6693906	1.6693905

مثال ٥-٣ :

قارن بين قيم الخطأ الشامل النهائي FGE عندما نطبق طريقة RK4 لحل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = (t - y)/2 ; \quad t \in [0,3], \quad y(0) = 1$$

باستخدام قيم حجم الخطوة :

$$h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$$

الحل :

الجدول التالي يعطي قيم الخطأ الشامل النهائي FGE المقابلة للقيم المختلفة لحجم الخطوة h ، ومنه يتبين أن الخطأ في تقريب قيمة $y(3)$ يقل إلى نحو $\frac{1}{16}$ من قيمته عندما يقل حجم الخطوة إلى نصف قيمته.

$$E(y(3) , h) = y(3) - y_M = O(h^4) ; C = -0.000614$$

حجم الخطوة Step size, h	عدد الخطوات Number of steps. M	تقريب y(3) Approximation to y(3) , yM	الخطأ عند t=3 Error at t=3, $y(3) - y_M$	$O(h^4)=Ch^4$ حيث C=-0.000614
1	3	1.6701860	-0.0007955	-0.0006140
$\frac{1}{2}$	6	1.6694308	-0.0000403	-0.0000384
$\frac{1}{4}$	12	1.6693928	-0.0000023	-0.0000024
$\frac{1}{8}$	24	1.6693906	-0.0000001	-0.0000001

بمقارنة مثالي ٥-٢ ، ٥-٣ بمثالي ٤-٢ ، ٤-٣ يتبين لنا معنى العبارة " طريقة RK4 تحاكي (simulates) طريقة متسلسلة تايلور من الرتبة N-4 " . فمن هذه الأمثلة يتضح لنا أن الطريقتين تولدان (generate) مجموعات حلول متطابقة (identical solution sets) $\{(t_k, y_k)\}$ عبر الفترة المعطاة. وتتميز طريقة RK4 عن طريقة تايلور بأننا لا نحتاج في طريقة

RK4 لحساب قيم أي مشتقات عالية (higher derivatives) ، ولا تظهر أي صيغ لهذه المشتقات في البرنامج.

وليس من السهل عموما تحديد الدقة التي حسب بها الحل بطريقة RK. ويمكننا لذلك:

- إما أن نقدِّر (estimate) حجم $y^{(4)}(c)$ ونستخدم الصيغة (22).
- أو أن نكرر تطبيق الخوارزمية مستخدمين حجم خطوة أصغر ونقارن النتائج.
- أو أن نحدد حجم الخطوة المناسب بعد عدة خطوات ، كما هو موضح في خورازمية رونج – كوتا – فهلبرج RKF45 (المبينة فيما يلي). وسنرى بإذن الله تعالى في الفصل القادم كيف نقوم بتغيير حجم الخطوة لطريقة متعددة الخطوات (multistep method).

طريقة رونج – كوتا – فهلبرج (RKF45)
The Runge-Kutta-Fehlberg Method (RKF45)

إحدى الطرق المتبعة لضمان دقة حل مسألة قيمة ابتدائية (guarantee accuracy in the solution of an IVP) تعتمد على حل المسألة مرتين باستخدام حجمي خطوة h , h/2 ومقارنة الحلين (compare answers) عند كل من نقاط الشبكة (mesh points) المقابلة (corresponding) لحجم الخطوة الأكبر h. ولكن ذلك يتطلب قدرا كبيرا من الحسابات لحجم الخطوة الأصغر ، كما أنه يتطلب تكرار العملية إذا رأينا أن اتفاق القيم (اتفاق الحلين) لم يكن بدرجة كافية مقبولة.

وتعد طريقة رونج–كوتا–فهلبرج (والتي سنشير إليها بطريقة RKF45) إحدى الطرق المستخدمة لمحاولة التغلب على تلك الصعوبة وحل هذه المشكلة. وفكرة الطريقة هي استخدام إجراء procedure يتحقق من أن حجم

الخطوة المناسب h قد تم استخدامه ، وذلك عن طريق حساب ومقارنة تقريبين مختلفين للحل (two different approximations for the solution) عند كل خطوة (at each step). فإن كان الحلان / التقريبان متفقين أو قريبين من بعضيهما (in close agreement) فإننا نقبل هذا التقريب. وإن كان الحلان غير متفقين لدرجة معينة من الدقة (do not agree to a specified accuracy) فإننا نقوم بتصغير حجم الخطوة. وأما إن كان الحلان متفقين لعدد من الأرقام المعنوية أكبر من العدد المطلوب (agree to more significant digits than required) ، فإننا نقوم بتكبير حجم الخطوة.

وكل خطوة في هذه الطريقة تتطلب استخدام القيم الست التالية:

$$
\begin{aligned}
k_1 &:= hf(t_k, y_k),\\
k_2 &:= hf\left(t_k + \tfrac{1}{4}h,\ y_k + \tfrac{1}{4}k_1\right),\\
k_3 &:= hf\left(t_k + \tfrac{3}{8}h,\ y_k + \tfrac{3}{32}k_1 + \tfrac{9}{32}k_2\right),\\
k_4 &:= hf\left(t_k + \tfrac{12}{13}h,\ y_k + \tfrac{1932}{2197}k_1 - \tfrac{7200}{2197}k_2 + \tfrac{7296}{2197}k_3\right),\\
k_5 &:= hf\left(t_k + h,\ y_k + \tfrac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \tfrac{3680}{513}k_3 - \tfrac{845}{4104}k_4\right),\\
k_6 &:= hf\left(t_k + \tfrac{1}{2}h,\ y_k - \tfrac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \tfrac{3544}{2565}k_3 + \tfrac{1859}{4104}k_4 - \tfrac{11}{40}k_5\right).
\end{aligned}
\qquad (27)
$$

حيث نحسب أولا تقريبا لحل مسألة القيمة الابتدائية باستخدام طريقة رونج – كوتا من الرتبة الرابعة:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5 . \qquad (28)$$

وهذه الطريقة تستخدم قيم الدالة الأربع k_1, k_3, k_4, k_5. ولاحظ أن k_2 لا تستخدم في هذه الصيغة.

ثم نحسب بعد ذلك تقريبا أفضل لحل المسألة باستخدام طريقة رونج – كوتا من الرتبة الخامسة:

$$z_{k+1} = y_k + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12,825}k_3 + \frac{28,561}{56,430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6 \quad .(29)$$

وأما حجم الخطوة الأمثل s.h (optimal step size) فيمكن تحديده بضرب الثابت القياسي s (scalar) بحجم الخطوة الحالي h (current step size) ، حيث s يعطى بالعلاقة:

$$\begin{aligned} s &= \left(\frac{Tol\ h}{2|z_{k+1} - y_{k+1}|} \right)^{1/4} \\ &\approx 0.84 \left(\frac{Tol\ h}{|z_{k+1} - y_{k+1}|} \right)^{1/4} \end{aligned} \qquad (30)$$

حيث Tol هو التفاوت المسموح به للتحكم في الخطأ (specified error control tolerance).

وأما استنتاج الصيغة (30) فيمكن الرجوع إليه في أحد المراجع المتقدمة في التحليل العددي. والنقطة الهامة التي نحب أن نشير إليها هنا هي أن استخدام حجم خطوة ثابت (fixed step size) ليس هو الأسلوب الأمثل لحل مسألة ما ، رغم أنه يعطي جدول قيم متتالية مرتبة تبدو في صورة أفضل.

مثال ٥-٤:

قارن بين طريقتي RK4 , RKF45 لحل مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = 1 + y^2 \; ; \qquad t \in [0, 1.4], \quad y(0) = 0 \, .$$

الحل:

عند استخدام برنامج لحل المسألة بطريقة RKF45 وبأخذ القيمة $Tol = 2 \times 10^{-5}$ لتفاوت التحكم في الخطأ ، فإن البرنامج يقوم تلقائيا بتغيير حجم الخطوة وتوليد التقريبات العشر لحل المسألة ، والمبينة في الجدول التالي:

k	t_k	الحل التقريبي RKF45 approximation y_k	الحل الصحيح True solution, $y(t_k) = \tan(t_k)$	الخطأ Error, $y(t_k) - y_k$
0	0.0	0.0000000	0.0000000	0.0000000
1	0.2	0.2027100	0.2027100	0.0000000
2	0.4	0.4227933	0.4227931	-0.0000002
3	0.6	0.6841376	0.6841368	-0.0000008
4	0.8	1.0296434	1.0296386	-0.0000048
5	1.0	1.5574398	1.5774077	-0.0000321
6	1.1	1.9648085	1.9647597	-0.0000488
7	1.2	2.5722408	2.5721516	-0.0000892
8	1.3	3.6023295	3.6021024	-0.0002271
9	1.35	4.4555714	4.4552218	-0.0003496
10	1.4	5.7985045	5.7978837	-0.0006208

جدول حل المسألة $y(0)=0$, $y' = 1 + y^2$ بطريقة RKF45

وأما عند استخدام برنامج لحل المسألة بطريقة RK4 وبأخذ حجم الخطوة الثابت (المحدد سابقا / الافتراضي a priori step size) $h = 0.1$ فإن البرنامج يقوم بتوليد ١٤ تقريبا عند النقاط المتساوية المسافات فيما بينها ، كما هو مبين في الجدول التالي:

k	t_k	الحل التقريبي RK4 approximation y_k	الحل الصحيح True solution, $y(t_k) = \tan(t_k)$	الخطأ Error, $y(t_k) - y_k$
0	0.0	0.0000000	0.0000000	0.0000000
1	0.1	0.1003346	0.1003347	0.0000001
2	0.2	0.2027099	0.2027100	0.0000001
3	0.3	0.3093360	0.3093362	0.0000002
4	0.4	0.4227930	0.4227932	0.0000002
5	0.5	0.5463023	0.5463025	0.0000002
6	0.6	0.6841368	0.6841368	0.0000000
7	0.7	0.8422886	0.8422884	-0.0000002
8	0.8	1.0296391	1.0296386	-0.0000005
9	0.9	1.2601588	1.2601582	-0.0000006
10	1.0	1.5574064	1.5574077	0.0000013
11	1.1	1.9647466	1.9647597	0.0000131
12	1.2	2.5720718	2.5721516	0.0000798

13	1.3	3.6015634	3.6021024	0.0005390
14	1.4	5.7919748	5.7978837	0.0059089

جدول حل المسألة $y(0)=0\ ,\ y'=1+y^2$ بطريقة RK4

وبمقارنة الحلين / التقريبين عند نقطة النهاية 1.4 (endpoint) نلاحظ ما يلي:

١) باستخدام طريقة RKF45:

$$y(1.4)\approx y_{10}=5.7985045$$
$$\text{Error}\approx E_{10}=-0.0006208$$

٢) باستخدام طريقة RK4:

$$y(1.4)\approx y_{14}=5.7919748$$
$$\text{Error}\approx E_{14}=0.0059089$$

ومن ذلك يتبين لنا أن الخطأ يكون أقل عند استخدام طريقة RKF45.

* * *

خطأ الاقتطاع والاستقرار والتحكم في حجم الخطوة في خوارزميات RK
Truncation error, Stability, and Step-size control in RK algorithms

في خوارزمية RK القياسية (RK4) تكون صيغة خطأ الاقتطاع المحلي (local truncation error):

$$e_t = K\,h^5 + O\,(h^6)$$

حيث K يعتمد على f ومشتقاتها الجزئية. فإذا كانت h صغيرة صغرا كافيا (sufficiently small) فإن الخطأ يكون محكوما (dominated) بالحد الأول.

التحكم في حجم الخطوة (Step-size control)

لاختيار قيمة مناسبة لحجم الخطوة h نحتاج لتقدير ما للخطأ (some estimate of the error) عند المكاملة عبر خطوة واحدة (integrating across one step). ونلاحظ أنه من ناحيةٍ فإن حجم الخطوة h يجب أن يكون صغيرا صغرا يكفي للوصول إلى الدقة المطلوبة (required accuracy) . ومن ناحية أخرى فإن حجم الخطوة h يجب أن يكون أكبر ما يمكن للتحكم في أخطاء التقريب (rounding errors) [وهي دالة في عدد العمليات الحسابية التي نجريها (arithmetic operations performed)].

ولتجنب حساب قيم عدد كبير من المشتقات (excessive number of derivative evaluations) ، خاصة عندما تكون المعادلة التفاضلية معقدة وكل مشتقة تتطلب وقتا طويلا لحسابها (substantial computing time) . ويلاحظ أن المشتقة تُحسب لها أربع قيم في كل خطوة تكامل (integration step).

تقدير الخطأ في طريقة RK

(Error estimate for RK method)

وإحدى الوسائل للوصول إلى حل لهذه المسألة أن نفترض أن خطأ الاقتطاع المحلي (ℓte) صيغته Kh^5 وأنه هو العنصر الغالب في التغير الذي يحدث في الخطأ الكلي (dominates the change in total error) في الخطوة. ثم نستطيع إيجاد تقدير (estimate) لخطأ الاقتطاع المحلي (ℓte) بإجراء التكامل بين نقطتين (مثلا x_i , x_j) باستخدام حجمي خطوة مختلفين h_1 , h_2 لحساب قيمة y_j. ونفرض أن الحلين المقابلين هما – على الترتيب – $y_{j,1}$, $y_{j,2}$. وإذا فرضنا أن الحل المضبوط هو $y(x_j)$ ، فبتطبيق طريقة ريتشاردسون للاستيفاء (Richardson extrapolation technique) نحصل على ما يلي:

$$y(x_j) = y_{j,1} + Kh_1^5 \frac{x_j - x_i}{h_1} \qquad (31)$$

$$y(x_j) = y_{j,2} + Kh_2^5 \frac{x_j - x_i}{h_2} \qquad (32)$$

ومن هاتين العلاقتين نستنتج أن:

$$\frac{y(x_j) - y_{j,1}}{Kh_1^4} = \frac{y(x_j) - y_{j,2}}{Kh_2^4}$$

$$y(x_j) - y_{j,1} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^4 \left[y(x_j) - y_{j,2}\right]$$

فإذا فرضنا أن $r = \frac{h_1}{h_2}$ ، فنحصل على:

$$y(x_j)\left[1 - r^4\right] = y_{j,1} - r^4 y_{j,2}$$

$$y(x_j) = \frac{y_{j,1} - r^4 y_{j,2}}{1 - r^4}$$

فإذا اخترنا $h_2 = \frac{h_1}{2}$ ، أي أن $r = 2$ ، فإن:

$$y(x_j) = \frac{y_{j,1} - 16\, y_{j,2}}{-15}$$

وبفرض أن $x_j - x_i = h_1$

أي أن $j = i + 1$

فنحصل من المعادلة (31) على العلاقة

$$y(x_j) = y_{j,1} + K\, h_1^5$$

وبالتالي فإن خطأ الاقتطاع المحلي يعطى بالعلاقة

$$\ell te \equiv e_t = K\, h_1^5 = y(x_j) - y_{j,1}$$

$$= \frac{y_{j,1} - 16y_{j,2} + 15y_{j,1}}{-15}$$

$$= \frac{16}{15}\left(y_{j,2} - y_{j,1}\right)$$

$$= \frac{16}{15}\left(y_{i+1,2} - y_{i+1,1}\right)$$

ومن الصعب تعيين حد (bound) للخطأ المتراكم (accumulated error) في خوارزميات رونج – كوتا. وعموما إذا كان خطأ الاقتطاع المحلي لطريقة أحادية الخطوة (one-step method) في حدود $O(h^{m+1})$ فإن الخطأ المتراكم سيكون في حدود $O(h^m)$.

ويمكن إثبات أن جميع طرق RK تقاربية (convergent) ، أي أن:

$$\lim_{h\to 0}\left(y_i - y(t_i)\right) = 0$$

الاستقرار (Stability)

ومن المعايير الأخرى التي نرجع إليها عند اختيار خوارزمية لحل معادلة تفاضلية معطاة مع شروط ابتدائية معيار الاستقرار.

تعريف:

يقال لحلٍّ ما إنه **غير مستقر (unstable)** إذا كانت الأخطاء التي تنشأ عند أي مرحلة من مراحل الحسابات [إما بسبب خطأ الاقتطاع المحلي (ℓte) أو أخطاء التقريب (round off errors) أو الشروط الابتدائية الخاطئة (erroneous initial conditions)] تنتشر بلا حدود (propagate without bound)] أي تزيد بسرعة (increase rapidly) خلال مراحل الحسابات التالية ، فينشأ عنها حل غير مطلوب (unwanted solution) يكتسح / يفوق / يغرق (swamps) الحل المطلوب.

وهناك معادلات تفاضلية معينة (certain $D.E.^s$) مع شروط ابتدائية محددة (specified initial conditions) لا يمكن أن تُحل بأي إجراء تكامل خطوة خطوة (step by step integration procedure) بدون إظهار عدم استقرار (without exhibiting instability) ويقال لهذه المعادلات إنها غير مستقرة بذاتها أو إن عدم الاستقرار ملازم لها ومتأصل فيها (inherently unstable). مثلا المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y) = t + y\,; \qquad y(t_0) = y_0$$

حلها التحليلي العام (general analytical solution) هو:

$$y(t) = -t - 1 + (1 + t_0 + y_0)e^{-t_0}\, e^{t}$$

والشرط الابتدائي y(0) = -1 يجعل المقدار $A \equiv (1 + t_0 + y_0)e^{-t_0}$ [وبالتالي الحد الأسِّي (exponential term)] يختفي / يتلاشى (vanish) ، وذلك يعطي الحل y(t) = -t -1. ولكن أثناء الحسابات هناك احتمال كبير لإدخال هذا الحد الأسِّي . وحتى لو كان عامل الضرب المحلي (local multiple of) e^t صغيرا فإن أي خطأ ناشئ [مثلا بسبب تغير بسيط جدا في الشرط الابتدائي كأن تكون y(0) = -0.99999] سوف ينمو ويكبر بسرعة (grow rapidly) ويكتسح الحل المطلوب (–t –1) ويسبب تغيرا كبيرا في قيمة الحل (وحتى في إشارته في هذه الحالة) لقيم t الكبيرة. وحتى إذا كان الشرط الابتدائي خاليا من أي أخطاء في الخطوة الأولى ، فإن الشروط الابتدائية في الخطوات التالية سوف تحتوي على أخطاء ناشئة عن أخطاء الاقتطاع وأخطاء التقريب في الخطوات السابقة ، وبالتالي فإن الحل المحسوب (calculated solution) لقيم t الكبيرة سوف لا يشبه الحل المضبوط. وهذه هي النتيجة التي سنصل إليها عند حل مثل هذه المعادلة باستخدام إحدى الطرق أحادية الخطوة (one-step methods). أي أن الاستقرار الذاتي (inherent stability) خاصية مرتبطة بالمعادلة التي نحلها والشروط الابتدائية المعطاة ، ولا تعتمد على الخوارزمية الخاصة التي نستخدمها في الحل.

عدم الاستقرار الجزئي (partial instability)

يعتمد عدم الاستقرار الجزئي – والذي سنشرح معناه بإذن الله فيما يلي – على المعادلة التفاضلية والشروط الابتدائية والطريقة الخاصة أحادية الخطوة المستخدمة في الحل. وهذه الظاهرة (phenomenon) لها علاقة بحجم الخطوة المختار ، وسنشرحها بدراسة خوارزمية أويلر.

في برهان نظرية تراكم الخطأ في طريقة أويلر حصلنا على المعادلة التالية التي تعطي علاقة بين الخطأ الكلي عند t_{k+1} والخطأ الكلي عند t_k.

$$\Delta\varepsilon_k = \varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k = h\left[f(t_k, y_k) - f(t_k, y(t_k))\right] - \frac{h^2}{2} f'(\xi, y(\xi)),$$
$$\xi \in (t_k, t_{k+1})$$

وبتطبيق نظرية القيمة المتوسطة في التفاضل (diff. Mean value theorem):

$$\frac{f(t_k, y_k) - f(t_k, y(t_k))}{y_k - y(t_k)} = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{t_k, \alpha}; \qquad \alpha \in (y(t_k), y_k)$$

$$\Rightarrow \quad f(t_k, y_k) - f(t_k, y(t_k)) = \varepsilon_k \cdot \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{t_k, \alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k \left(1 + h \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{t_k, \alpha}\right) - \frac{h^2}{2} f'(\xi, y(\xi)),$$
$$\xi \in (t_k, t_{k+1}), \qquad \alpha \in (y(t_k), y_k)$$

الحد الأول $\varepsilon_k \left(1 + h \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{t_k, \alpha}\right)$ يمثل مساهمة الخطأ المتراكم في الخطأ عند t_{k+1} ، والحد الثاني $-\frac{h^2}{2} f'(\xi, y(\xi))$ يمثل خطأ الاقتطاع المحلي (ℓte).

- فإن كانت $\frac{\partial f}{\partial y} < 0$ فإنه يمكننا أن نجد قيمة لحجم الخطوة h بحيث يكون $\left|1 + h \frac{\partial f}{\partial y}\right| < 1$ ، وبالتالي فإن الخطأ يتجه للتناقص أو التلاشي (error tends to diminish or die out).
- وأما إن كان $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ فيكون $P \equiv 1 + h \frac{\partial f}{\partial y} > 1$ ، أي أن الخطأ عند t_k سوف يُكبَّر (amplified) ، وتزداد قيمته عند اجتيازنا الخطوة رقم k ، وبذا يتجه الحل إلى عدم الاستقرار (instability). إلا أنه – حتى في هذه الحالة – قد يكون ممكنا التحكم في الخطأ المتراكم خاصة في المرحلة الأولى من التكامل وذلك باختيار قيمة صغيرة لحجم الخطوة h صغرا

كافيـا ، أي بمحاولـة جعـل قيمـة معامـل الانتشـار / التـراكم / التكبيـر (amplification / accumulation / propagation factor) $P \equiv \left[1 + h\frac{\partial f}{\partial y}\right]$ قريبة من الواحد.

وإذا فرضـنا أن $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ وتسـاوي مقـدارا ثابتـا (constant) ، بحيـث أن معامـل الانتشـار $\forall h \quad P > 1$ وأن الخطـأ يـزداد بـلا حـدود كلمـا ازدادت قيمة x ، وفرضنا أن لدينا مسألة القيمة الابتدائية

$$y' \equiv \frac{dy}{dt} \equiv f(t, y) = 2y, \quad y(t_0) = y_0$$

والتي حلها هو

$$y(t) = y_0\, e^{2(t-t_0)}$$

فليس من الضروري أن يؤدي نمو الخطأ غير المحدود (unbounded growth of the error) إلى أن يصبح الحل العددي المحسوب غير صحيح ، وذلك لأن الحل الصحيح نفسه غير محدود كلما زادت t. فالمقياس المهم (important criterion) لـدينا لـيس أن يكـون الخطـأ المطلـق ε_k (absolute error) محدودا (bounded) ، ولكن هو ألا يزيد الخطأ النسبي (relative error) ε_k / y_k زيادة كبيرة.

مثال ٥-٥:

أوجد قيم h التـي تـؤدي إلـى نظـام مسـتقر (stable system) عنـدما نحل مسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dy}{dt} = -10\, y\,; \qquad y(0) = y_0$$

باستخدام (i) طريقة RK ثنائية الرتبة (طريقة هوين / طريقة أويلر المحسَّنة)
(ii) طريقة RK4 (القياسية)

الحل :

(i) باستخدام طريقة هوين / طريقة أويلر المحسنة

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + hf(t_k, y_k))\right]$$
$$= y_k + \frac{h}{2}\left[-10y_k + (-10)(y_k + h(-10y_k))\right]$$
$$= y_k\left[1 - 10h + 50h^2\right]$$
$$\Rightarrow \quad y_1 = \left[1 - 10h + 50h^2\right] y_0$$
$$y_2 = \left[1 - 10h + 50h^2\right]^2 y_0$$
$$\vdots$$
$$y_{k+1} = y_1 = \left[1 - 10h + 50h^2\right]^{k+1} y_0$$
$$= \lambda^{k+1} y_0$$

حيث $\lambda = 1 - 10h + 50h^2$ (لاحظ أن λ جزء من مفكوك e^{-10h}).

إذا كانت $|\lambda| > 1$ فإن الحل المحسوب سينمو بلا حدود (grows unboundedly) أي يزداد بسرعة وسيكون سلوكه مختلفا تماما عن الحل الصحيح y_0e^{-10t} ولذلك فحتى يكون النظام مستقرا يجب أن يتحقق الشرط

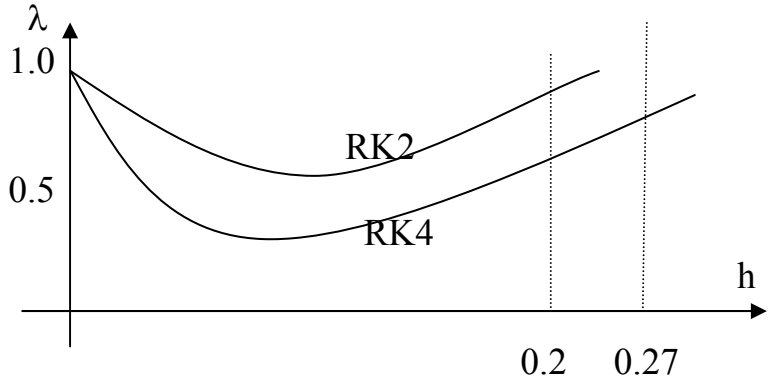
$$\text{stability} \Rightarrow \quad |\lambda| < 1$$
$$\Rightarrow \quad -1 < 1 - 10h + 50h^2 < 1$$
$$1 - 10h + 50h^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < h < 0.2$$
$$1 - 10h + 50h^2 > -1 \quad \Rightarrow \quad h \text{ العلاقة صحيحة لجميع قيم}$$
$$\therefore \quad |\lambda| < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < h < 0.2$$

أي أن شرط استقرار النظام هو $0 < h < 0.2$.

(ii) باستخدام طريقة RK4 القياسية:

هذه الطريقة تؤدي إلى العلاقة

$$y_{k+1} = \left(1 - 10h + 50h^2 - \frac{500}{3}h^3 + \frac{1250}{3}h^4\right)^{k+1} y_0$$



شكل ٥-٥

شرط استقرار طريقتي RK2, RK4 : $|\lambda| < 1$

من منحنى كالمبين بشكل ٥-٥ يتبين لنا شرط فترة الاستقرار $y' = -kh < 2.7$. وعموما ، بالنسبة للنظام $y' = -k\,y \quad (k > 0)$ فإن طريقة RK4 القياسية تتطلب الشرط $0 < k\,h < 2.7$ حتى يتحقق الاستقرار.

* * *

وفي ختام هذا الفصل نلخص خوارزمية كل من طريقتي RK4, RKF45.

خوارزمية طريقة رونج – كوتا من الرتبة الرابعة (RK4)

لإيجاد حل تقريبي لمسألة القيمة الابتدائية

$y' = f(t,y)\ ; \quad t \in [a,b]\ , \quad y(a) = y_0$

باستخدام الصيغة

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4]$$

```
INPUT A, B, Y(0)                                  {Endpoints and initial value}
INPUT M                                           {Number of steps}
H := [B – A]/M                                    {Compute the step size}
T(0) := A                                         {Initialize the value}

FOR   J = 0 TO M-1 DO
      T := T(J) and Y := Y(J)                     {Local variables}
      K1 := H*F(T,Y)                              {Function value at tj}
      K2 := H*F(T+H/2, Y + 0.5*K1)                {Function value at tj+1/2}
      K3 := H*F(T+H/2, Y + 0.5*K2)                {Function value at ti+1}
      K4 := H*F(T+H, Y + K3)                      {Integrate f(t,y)}
      Y(J+1) := Y+ [K1 + 2* K2 + 2* K3 + K4]/6    {Generate the mesh point}
      T(J+1) := A + H*[J + 1]

FOR   J = 0  TO  M  DO                            {Output}
      PRINT T(J), Y(J)
```

خوارزمية طريقة رونج – كوتا – فهلبرج (RKF45)

لإيجاد حل تقريبي لمسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t,y) ; \quad t \in [a,b] , \quad y(a) = y_0$$

باستخدام طريقة حجم الخطوة المتغير (variable step size) مع تحكم في الخطأ (error control).

```
Tol := 2*10^-5                                    {Error control tolerance}
INPUT A, B, Y(0)                                  {Endpoints and initial value}
INPUT N                                           {Tentative number of steps}
H := [B-A]/N                                      {Initial step size}
Hmin := H/64 and Hmax := h*64                     {Minimum and maximum step sizes}
T(0) := A and J := 0                              {Initialize}

WHILE T(J) < B DO
   IF T(J)+H > B THEN H := B-T(J)                 {The last step}
   T := T(J) and Y := Y(J)
   K1 := H * F(T, Y)
   K2 := H * F(T + 1/4 H, Y + 1/4 K1)             {Compute the
   K3 = H * F(T + 3/8 H, Y + 3/32 K1 + 9/32 K2)    function
   K4 = H * F(T + 12/13 H, Y + 1932/2197 K1 – 7200/2197 K2 + 7296/2197 K3)   values}
```

```
    K5 := H * F(T + H, Y + 439/216 K1 − 8K2 + 3680/513 K3 − 845/4104 K4)
    K6 := H * F(T + 1/2 H, Y − 8/27 K1 + 2K2 − 3544/2565 K3 + 1859/4104 K4 − 11/40 K5)
    Err := |1/360 K1 − 128/4275 K3 − 2197/75240 K4 + 1/50 K5 + 2/55 K6|      {|Z_{k+1} − y_{k+1}|}
  IF  Err<Tol OR H ≦ 2*Hmin THEN
      Y(J + 1) := Y + 25/216 K1 + 1408/2565 K3 + 2197/4104 K4 − 1/5 K5      {Accept the
      T(J + 1) := T + H, J := J + 1                                          approximation}
  IF  Err=0 THEN
        S := 0                                                               {Trap division by 0}
      ELSE
        S := .84*[Tol*H/Err]^1/4                                             {Step size scalar}
  ENDIF
  IF  S<.75 AND H>2*Hmin  THEN  H := H/2                                     {Reduce step}
  IF  S>1.5 AND 2*H<Hmax  THEN  H := H*2                                     {Increase step}
End

FOR   l=0 TO J DO
      PRINT T(I) , Y(I)                                                      {Output}
```

تمرينات رقم ٥

٥-١) نفرض أننا سنقوم بحل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(x,y); \qquad y(x_0) = y_0$$

بطريقة رونج – كوتا من الرتبة الرابعة RK4.

أ) وضح كيف يمكن استخدام طريقة ريتشاردسون للاستيفاء للحصول على تقدير لخطأ الاقتطاع المحلي ℓte ، وأوجد صيغة لهذا التقدير.

ب) بالنسبة لمسألة القيمة الابتدائية

$$y' = 1 + y^2; \qquad y(0) = 1$$

والتي حلها النظري هو $y(t) = \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$

احسب الحل العددي لخطوتين باستخدام طريقة RK4 وبطول خطوة (step length) h = 0.1. ثم أعد الحساب لخطوة واحدة فقط طولها h = 0.2.

احسب قيمة الخطأ الفعلي (actual error) عند x = 0.2 في الحالتين (h = 0.1 , h = 0.2) وقارن مع القيمة المقدرة لخطأ الاقتطاع المحلي الذي نحصل عليه بطريقة ريتشاردسون للاستيفاء.

٥-٢) نفرض أن لدينا مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = \lambda y, \qquad y(x_0) = \mu \qquad (*)$$

حيث كل من μ , λ ثابت.

(أ) اثبت أن تطبيق طريقة رونج – كوتا RK4 باستخدام حجم خطوة h لحل المسألة (*) يؤدي إلى الحصول على العلاقة:

$$\frac{y_{k+1}}{y_k} = e^{\lambda h} + O\left((\lambda h)^5\right);$$

حيث y_k هي قيمة y عند $x = x_k = x_0 + kh$.

(ب) نفرض أن $\mu = 4$, $x_0 = -2$, $\lambda = -1$. هل ستكون طريقة RK4 مستقرة للمسألة المعطاة إذا أخذنا $h = 1$ ؟

٥-٣) نفرض أننا سنقوم بحل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = -y, \qquad y(0) = 1$$

وذلك بطريقة RK4 وباستخدام حجم خطوة h.

(أ) أوجد صيغة لحساب y_n (أي لحساب قيمة y عند $x = nh$).

(ب) احسب قيمة y عند $x = 0.2$ باستخدام $h = 0.2$ وكذلك باستخدام $h = 0.05$. واحسب الخطأ عند $x = 0.2$ في كل من الحالتين ، وعلق على سلوك الخطأ عندما تؤول h إلى الصفر $(h \to 0)$.

(ج) تحقق من أن طريقة RK4 تكون مستقرة بالنسبة للمعادلة المعطاة عندما $h = 0.2$.

٥-٤) نفرض أن لدينا مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(x, y) = y, \qquad y(0) = 1.$$

عند تطبيق طريقة RK4 باستخدام حجم خطوة h نحصل بعد عدد n من الخطوات على القيمة

$$y_n = [A(h)]^n$$

كتقريب للحل المضبوط

$$y(x_n) \equiv y(nh) = e^{nh}$$

(أ) أوجد تعبيرا جبريا (algebraic expression) لقيمة A(h).

(ب) بفرض أن $h = 0.1$ احسب كلا من y_1 , y_3 (أي احسب قيمة y العددية عند كل من $x = 0.3$, $x = 0.1$) ، وأوجد خطأ الاقتطاع المقابل لكل من القيمتين.

* * *

في كل من المسائل التالية من (٥-٥) ← (٥-٩) استخدم طريقة رونج – كوتا RK4 لإيجاد الحلول التقريبية لمسائل القيمة الابتدائية المعطاة باتباع الخطوات التالية:

أ) احسب قيم $y_1, y_2, ..., y_M$ لكل من الحالتين :

(i) $h = 0.2$, $M = 1$ (ii) $h = 0.1$, $M = 2$

ب) قارن الحل المضبوط $y(0.2)$ مع كل من الحلين التقريبيين اللذين حصلت عليهما في (أ). هل لاحظت أن قيمة الخطأ الشامل النهائي FGE في (أ) تتفق مع النتيجة المتوقعة عندما تقل قيمة حجم الخطوة h إلى نصف قيمتها ؟

ج) استخدم حاسوبا لإجراء الحسابات على الفترة الأكبر [a,b] المعطاة.

٥-٥) أ) أوجد حل المسالة IVP :

$$y' = t^2 - y , \quad t \in [0 , 0.2] , \quad y(0) = 1$$

ب) قارن مع الحل المضبوط : $y(t) = -e^{-t} + t^2 - 2t + 2$

ج) أعد حل المسألة المعطاة في أ) في الفترة :

$$[a , b] = [0 , 2] ; \quad h = 0.2 , 0.1 , 0.05.$$

٥-٦) أ) أوجد حل المسألة

$$y' = 3y + 3t ; \quad t \in [0 , 0.2] , \quad y(0) = 1.$$

ب) قارن مع الحل المضبوط

$$y(t) = \frac{4}{3}e^{3t} - t - \frac{1}{3}$$

ج) أعد حل المسألة في الفترة

$$[a , b] = [0 , 2] ; \quad h = 0.2 , 0.1 , 0.05.$$

٥-٧) أ) أوجد حل المسألة

$$y' = -ty\,, \quad t \in [0\,,\,0.2]\,, \quad y(0) = 1.$$

ب) قارن مع الحل المضبوط : $y = e^{-t^2/2}$

ج) أعد حل المسألة في الفترة

$$[a\,,\,b] = [0\,,\,2]\,; \qquad h = 0.2\,,\,0.1\,,\,0.05.$$

٥-٨) أ) أوجد حل المسألة

$$y' = e^{-2t} - 2y\,; \quad t \in [0,0.2], \quad y(0) = \frac{1}{10}$$

ب) قارن مع الحل المضبوط

$$y(t) = \frac{1}{10}e^{-2t} + t\,.\,e^{-2t}$$

ج) أعد حل المسألة في الفترة

$$[a\,,\,b] = [0\,,\,2]\,; \qquad h = 0.2\,,\,0.1\,,\,0.05.$$

٥-٩) أ) أوجد حل المسألة

$$y' = 2ty^2\,; \qquad t \in [0\,,\,0.2]\,, \quad y(0) = 1.$$

ب) قارن مع الحل المضبوط

$$y(t) = 1/(1 - t^2)\,.$$

ج) أعد حل المسألة في الفترة

$$[a\,,\,b] = [0\,,\,2]\,; \qquad h = 0.1\,,\,0.05\,,\,0.025.$$

لاحظ أن طريقة RK4 ستؤدي إلى إيجاد قيمة تقريبية لـ $y(1)$ رغم أن منحنى الحل غير معرَّف عند $t = 1$.

٥-١٠) في أحد التفاعلات الكيميائية يتحد جزئ من مادة A مع جزئ من مادة B لتكوين جزئ من مركب كيميائي C . وقد وُجد أن تركيز C (concentration) عند اللحظة t – والذي نرمز إليه بالرمز $y(t)$ – هو حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = k(a - y)(b - y); \qquad y(0) = 0.$$

حيث k ثابت موجب ، و a , b هما التركيزان الابتدائيان للمادتين A , B على الترتيب.

افرض أن

k=0.01, a=70 millimoles/liter, b=50 millimoles/liter

طبق طريقة RK4 مستخدما h = 0.5 لإيجاد الحل على الفترة [0,20].

ملاحظة : يمكنك مقارنة الحل الذي تحصل عليه باستخدام الحاسوب مع الحل المضبوط.

$$y(t) = 350\,[1- \exp(-0.2\,t)] / [7- 5\exp(-0.2\,t)]$$

ولاحظ أنه عندما تؤول $t \to +\infty$ فإن الحل يؤول إلى القيمة

$$(\text{limiting value y}) \to 50$$

٥-١١) عن طريق حل مسألة قيمة ابتدائية مناسبة كوِّن جدولا لقيم الدالة f(x) المعطاة بالتكامل التالي:

$$f(x) = \frac{1}{2} + (2\pi)^{-1/2} \int_0^x \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) dt\,; \quad 0 \le x \le 3$$

استخدم طريقة RK4 متخذا h = 0.1 عند إجراء حساباتك ، ويجب أن يتفق حلك مع القيم المبينة بالجدول التالي:

x	f(x)
0.0	0.5
0.5	0.6914625
1.0	0.8413448
1.5	0.9331928
2.0	0.9772499

2.5	0.9937903
3.0	0.9986501

ملاحظة : الطريقة المشار إليها في هذا السؤال هي طريقة جيدة لتكوين / لتوليد (generate) جدول مساحات لتوزيع اعتيادي قياسي (table of areas for a standard normal distribution) (انظر السؤال التالي ٥-١٢)

٥-١٢) اثبت أنه عندما نستخدم طريقة RK4 لحل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t); \qquad t \in [a,b], \qquad y(a) = 0$$

فإننا نحصل على النتيجة :



حيث

$$h = (b-a)/M, t_k = a + k\,h, t_{k+1/2} = a + \left(k + \frac{1}{2}\right)h ,$$

والتي هي تقريب سمبسون (Simpson's approximation) بحجم خطوة h/2 للتكامل المحدود (definite integral) للدالة f(t) عبر الفترة [a,b].

٥-١٣) يمكن تطبيق طريقة ريتشاردسون للتحسين مع طريقة RK . فإذا استخدمنا طريقة RK4 متخذين حجم الخطوة h فإننا نحصل على :

$$y(b) \approx y_h + Ch^4$$

وإذا استخدمنا طريقة RK4 متخذين حجم الخطوة 2h فإننا نحصل على:

$$y(b) \approx y_{2h} + Ch^4$$

وبحذف الحدين اللذين يحتويان على Ch^4 فإننا نحصل على التقريب المحسَّن (improved approximation) لـ y(b) ، والنتيجة هي:

$$y(b) \approx \frac{16y_h - y_{2h}}{15}$$

ويمكننا تطبيق طريقة التحسين هذه مع القيم المعطاة في مثال ٥-٣ لنحصل على تقريبات أفضل لـ y(3). أوجد القيم الناقصة في الجدول التالي:

h	y_h	$\frac{16y_h - y_{2h}}{15}$
1	1.6701860	
$\frac{1}{2}$	1.6694308	----------
$\frac{1}{4}$	1.6693928	----------
$\frac{1}{8}$	1.6693906	----------

الفصل السادس

طرق التقدير والتصحيح
Predictor – Corrector Methods

الطرق السابقة التي درسناها: طرق أويلر وهوين وتايلور ورونج–كوتا تسمى طرقا أحادية الخطوة (single-step methods) نظرا لأنها تستخدم معلومات عن النقطة السابقة فقط لحساب النقطة التالية. أي أن النقطة الابتدائية (t_0 , y_0) فقط تستخدم لحساب النقطة (t_1 , y_1). وعموما نحتاج إلى y_k لحساب y_{k+1}. وبعد الحصول على عدة نقاط يمكننا استخدام عدة نقاط سابقة في حساباتنا لإيجاد النقطة التالية. مثلا طريقة "آدمز–باشفورث" رباعية الخطوة (Adams-Bashforth four-step method) – والتي سنناقشها بإذن الله فيما بعد – تتطلب الأربع قيم: $y_k , y_{k-1} , y_{k-2} , y_{k-3}$ لحساب قيمة y_{k+1} . وهذه الطريقة بالطبع ليست ذاتية البدء (self-starting) ، إذ أن النقاط الابتدائية الأربع (t_3,y_3) , (t_2,y_2) , (t_1,y_1) , (t_0,y_0) يجب أن تعطَى مقدما لتوليد النقاط $\{(t_k,y_k); \quad k=4,5,6,...\}$.

ومثل هذه الطرق يطلق عليها طرق متعددة الخطوات (multistep methods). ومن مميزات هذه الطرق أن خطأ الاقتطاع المحلي (ℓte) يمكن تقديره ، وكذلك هناك صيغة للتصحيح (correction formula) يمكن استخدامها لتحسين دقة الحل (accuracy of the answer) عند كل خطوة. وبالإضافة إلى ذلك فمن الممكن تحديد ما إذا كان حجم الخطوة صغيرا صغرا كافيا للحصول على قيمة دقيقة (accurate value) لـ y_{k+1} ، وفي الوقت نفسه كبيرا كبرا كافيا للاستغناء عن الحسابات العديدة غير الضرورية والتي تستغرق وقتا طويلا. واستخدام صيغتي التقدير (أو التنبؤ) والتصحيح

(predictor and corrector formulas) – أي صيغة لحساب تقدير أولي لقيمة y ، ثم صيغة أخرى لتصحيح هذه القيمة الأولية والحصول على قيمة أدق – يتطلب حساب قيمتين فقط للدالة f(t,y) في كل خطوة.

الطرق متعددة الخطوات (Multi-step methods)

نفرض مرة أخرى أننا نكامل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$.

ونفرض أنه قد تم حساب قيمة y_k ، والمطلوب حساب القيمة التالية y_{k+1} .

الطرق متعددة الخطوات تستخدم خوارزميات صيغتها العامة:

$$y_{k+1} = y_{k-i} + \int_{t_{k-i}}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\, dt$$

والتي يمتد فيها التكامل عبر i+1 فترة (i+1 intervals) طول كل منها h.

وبناء على اختيار قيمة i . وطريقة تقريب التكامل يمكننا الحصول على صيغ عديدة مختلفة لهذه الطرق متعددة الخطوات. مثلا إذا كاملنا حدودية استكمال من الدرجة الثانية (2nd -degree interpolating polynomial) بين t_{k-1}, t_{k+1} (قاعدة سمبسون (Simpson's rule)) فإننا نحصل على:

$$y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{h}{3}(f_{k-1} + 4f_k + f_{k+1})$$

(طريقة ثنائية الخطوة 2-step method)

حيث:

$$f_k \equiv f(t_k, y_k)$$

وكمثال آخر:

طريقة "ميلن – سمبسون" للتقدير والتصحيح (أو للتنبؤ والتصحيح) متعددة الخطوات (Milne-Simpson predictor-corrector multistep method):

Predictor: $y_{k+1} = y_{k-3} + \frac{4h}{3}(2f_{k-2} - f_{k-1} + 2f_k) \quad (4-\text{step})$

Corrector: $y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{h}{3}(f_{k-1} + 4f_k + f_{k+1}) \quad (2-\text{step})$

ولاحظ أن معادلة التصحيح (Corrector) يمكن أن تطبق تكراريا (iteratively) أي عدة مرات متتالية ، بحيث أننا في كل مرة نستخدم أحدث قيمة متوفرة لدينا (most recently available value) لـ : $f_{k+1} \equiv f(x_{k+1}, y_{k+1})$ ، إلى أن يصبح التغير في قيمة y_{k+1} طفيفا.

وأهم ميزة لهذه الطرق متعددة الخطوات أنها تتطلب – في كل خطوة – حساب عدد من المشتقات أقل من ذلك المطلوب في طرق RK المقابلة التي تعطى تقريبا الدقة نفسها ، وبالتالي تستغرق الطرق متعددة الخطوات وقتا أقل في الحسابات.

وأما عن العيوب الرئيسية للطرق متعددة الخطوات فتتمثل أساسا في أنها – كما أشرنا سابقا – غير ذاتية البدء ، فإذا أُعطينا الشرط الابتدائي $y(t_0) = y_0$ فإننا لا نستطيع استخدام الصيغة متعددة الخطوات قبل إيجاد بعض قيم y (مثلا y_1, y_2, y_3 ، وبالتالي f_1, f_2, f_3) بطريقة مناسبة مثل طريقة RK أو طريقة تايلور أو طريقة أويلر ... الخ.

وكذلك من العيوب الرئيسية للطرق متعددة الخطوات أنها قد تتسبب في حدوث عدم استقرار (instability) بدرجة كبيرة بالنسبة لبعض المعادلات التفاضلية.

والصيغة العامة للطريقة الخطية متعددة الخطوات ذات i خطوة (linear i-step method) هي:

$$\alpha_0 y_k + \alpha_1 y_{k+1} + \alpha_2 y_{k+2} + \cdots + + \alpha_i y_{k+i} = h[\beta_0 f_k + \beta_1 f_{k+1} + \beta_2 f_{k+2} + \cdots + \beta_i f_{k+i}]; \quad k = 0,1,2,\cdots \qquad (*)$$

حيث $\alpha_0 , \alpha_1 , \cdots , \alpha_i , \beta_0, \beta_1 , \cdots , \beta_i$: ثوابت.

والآن نعرِّف الحدوديتين:

$$\rho(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots + \alpha_i z^i$$

$$\sigma(z) = \beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \cdots + \beta_i z^i$$

تعريفات

- الحدودية $\rho(z)$ يطلق عليها **الحدودية المميِّزة (characteristic polynomial)** المرتبطة (associated) بمعادلة الفروق (difference equation) (*) عندما $h = 0$.
- يقال للطريقة إنها **تقاربية (convergent)** إذا تحقق الشرط

$$\lim_{h\to 0} y_k = y(t_k)$$

- شرط **الاستقرار** (**stability** condition):

جميع جذور/أصفار الحدودية $\rho(z)$ (zeros z_j of) تحقق الشرط $|z_j| \le 1$ ، وكذلك جميع الجذور/الأصفار التي تقع على دائرة الوحدة (unit circle) تكون بسيطة (simple).

- يمكن إثبات أن شرط الاستقرار هو شرط ضروري (necessary condition) للتقارب (convergence).
- الطرق التي لا يتحقق شرط الاستقرار بالنسبة لها يطلق عليها "طرق غير مستقرة بدرجة عالية" (strongly unstable).

شروط التآلف (consistency conditions)

فيما يلي نستنتج شروط التآلف / الاتساق / التواؤم (consistency).

نفرض أن لدينا مسألة القيمة الابتدائية $y(0)=1\,,\ y'=0$ والتي حلها المضبوط هو $y(t) = 1$.

بتطبيق الصيغة العامة (*) (لاحظ أن $f(t,y) = 0$ وأننا نعلم من الحل المضبوط أن جميع قيم y_ℓ تساوي 1) نحصل على العلاقة

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_i = 0 \qquad \text{(I)}$$

والآن نفرض أن لدينا مسألة القيمة الابتدائية $y(0)=0\,,\ y'=1$ والتي حلها المضبوط هو $y(t) = t$ ، أي أن

$$f(t,y) = 1\ ,\quad y_k = k\,h$$

وبتطبيق الصيغة العامة (*) مرة أخرى نحصل على العلاقة

$$\alpha_0.kh + \alpha_1(k+1)h + \alpha_2(k+2)h + \cdots + \alpha_i(k+i)h = h(\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_i).$$

وبالتعويض عن α_0 من العلاقة (I) نحصل على

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + i\alpha_i = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_i \qquad (II)$$

ويمكننا كتابة الشرطين (II) , (I) في الصورة المبسطة

$$\rho(1) = 0 \quad \& \quad \rho'(1) = \sigma(1)$$

ويطلق عليهما **شرطا التآلف (consistency conditions)**

وشرطا التآلف ضروريان (necessary) للتقارب (convergence) [وهذا واضح من الاستنتاج السابق حيث أننا استخدمنا كلا من المعادلة التفاضلية D.E. ومعادلة الفروق (Difference equation)].

ملاحظة:

تعريف: يقال للطريقة الصريحة أحادية الخطوة (explicit one-step method)

$$y_{k+1} = y_k + h\,\phi(t_k, y_k, h)$$

إنها **متآلفة (consistent)** (مع مسألة القيمة الابتدائية

$$(y' = f(t,y);\quad y(t_0) = y_0$$ ، إذا كان

$$\phi(t,y,0) = f(t,y)$$

وبأسلوب آخر: يقال لهذه الطريقة أحادية الخطوة إنها **غير متآلفة (inconsistent)** إذا كان حل (solution) معادلة الفروق يتقارب (converges) إلى حل معادلة تفاضلية مختلفة (different D.E.) عندما تؤول h إلى الصفر ($h \to 0$).

فمثلا كل من الطريقتين التاليتين (طريقة أويلر وطريقة أويلر المعدلة) تعد طريقة متآلفة:

Euler: $\phi(t,y,h) = f(t,y) \Rightarrow$ consistent

Modified Euler : $\phi(t,y,h)=\bar{f}\equiv f\left(t_k\,,\frac{h}{2}\,,y_k+\frac{h}{2}f\left(t_k\,,y_k\right)\right)$

$\Rightarrow \phi(t,y,0)=f\left(t_k\,,y_k\right) \;\Rightarrow\; \text{consistent}$

* * *

وفيما يلي ندرس بعض الطرق متعددة الخطوات أو طرق التنبؤ والتصحيح.

طريقة آدمز – باشفورث – مولتن

(Adams-Bashforth-Moulton Method)

تعد طريقة آدمز – باشفورث – مولتن للتقدير والتصحيح طريقة متعددة الخطوات مبنية على أساس نظرية التفاضل والتكامل الأساسية

$$y(t_{k+1}) = y(t_k)+\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t,y(t))\,dt \qquad (1)$$

وتستخدم معادلة التنبؤ (predictor) حدودية لاجرانج (Lagrange polynomial) لتقريب f(t,y(t)) باستعمال النقاط

$$(t_{k-3},f_{k-3}),(t_{k-2},f_{k-2}),(t_{k-1},f_{k-1}),(t_k,f_k)$$

وبمكاملة حدودية لاجرانج عبر الفترة $[t_k,t_{k+1}]$ في العلاقة (1) نحصل على صيغة آدمز – باشفورث للتنبؤ:

$$p_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(-9\,f_{k-3}+37f_{k-2}-59\,f_{k-1}+55\,f_k) \quad (2)$$

ويمكن الحصول على صيغة التصحيح (corrector) بطريقة مماثلة. ويمكننا الآن استخدام قيمة p_{k+1}. ونقوم بتكوين حدودية لاجرانج أخرى لتقريب f(t,y(t)) باستعمال النقاط

$$(t_{k-2},f_{k-2}),(t_{k-1},f_{k-1}),(t_k,f_k)$$

والنقطة الجديدة $(t_{k+1},f_{k+1})=(t_{k+1},f(t_{k+1},f_{k+1}))$

ثم نقوم بمكاملة هذه الحدودية عبر الفترة $[t_k, t_{k+1}]$ وهذا يؤدي إلى حصولنا على صيغة آدمز – مولتن للتصحيح:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(f_{k-2} - 5f_{k-1} + 19\,f_k + 9\,f_{k+1}) \qquad (3)$$

ويبين شكل ٦–١ نقاط / عقد (nodes) حدوديتي لاجرانج المستخدمتين في استنتاج الصيغتين (3) , (2).

النقاط الأربع لصيغة آدمز – باشفورث للتقدير [استخدام الاستيفاء (extrapolation)]	النقاط الأربع لصيغة آدمز – مولتن للتصحيح [استخدام الاستكمال (interpolation)]
(i)	(ii)

شكل ٦–١

التكامل عبر الفترة $[t_k, t_{k+1}]$ في طريقة آدمز – باشفورث

تقدير الخطأ والتصحيح (Error Estimation and Correction)

حدا الخطأ (error terms) في صيغتي التكامل العددي (numerical integration formulas) المستخدمتين للحصول على صيغتي التقدير والتصحيح يُعَدَّان من الرتبة $O(h^5)$.

فخطأ الاقتطاع المحلي ℓte للصيغة (2) هو:

$$y(t_{k+1}) - p_{k+1} = \frac{251}{720}y^{(5)}(c_{k+1})h^{(5)} \quad (\ell te \text{ for the predictor}) \quad (4)$$

وخطأ الاقتطاع المحلي ℓte في الصيغة (3) هو:

$$y(t_{k+1}) - y_{k+1} = \frac{-19}{720}y^{(5)}(d_{k+1})h^5 \quad (\ell te \text{ for the corrector}) \quad (5)$$

فإذا فرضنا أن قيمة h صغيرة ، وأن قيمة $y^{(5)}(t)$ تقريبا ثابتة عبر الفترة ، فيمكن حينئذ حذف الحد الذي يحتوي على المشتقة الخامسة في كل من (5) , (4) ، وبالتالي نحصل على النتيجة التالية:

$$y(t_{k+1}) - y_{k+1} \approx \frac{-19}{720}(y_{k+1} - p_{k+1}) \qquad (6)$$

والآن تتضح أهمية طريقة التقدير والتصحيح ، حيث نرى أن الصيغة (6) تعطي تقديرا تقريبيا للخطأ (approximate error estimate) مبنيا على أساس قيمتين محسوبتين: p_{k+1} , y_{k+1} ولا تستخدم $y^{(5)}(t)$.

اعتبارات عملية (Practical Considerations)

(*)صيغة التصحيح (3) استخدمت التقريب $f_{k+1} \approx f(t_{k+1} - p_{k+1})$ في حساب y_{k+1}. ونظرا لأن y_{k+1} هي أيضا تقريب أو تقدير لقيمة $y(t_{k+1})$ فيمكن استخدامها في صيغة التصحيح (3) للحصول على / لتوليد تقريب جديد لقيمة f_{k+1} ، والذي بدوره يقوم بتوليد قيمة جديدة لـ y_{k+1} ، وهكذا. إلا أنه باستمرار تطبيق هذا التكرير (iteration) في صيغة التصحيح فإنه يتقارب نحو نقطة ثابتة (fixed point) في (3) بدلا من المعادلة التفاضلية. ولذا فمن الأكفأ (more efficient) – إذا أردنا الحصول على دقة أكبر (more accuracy) – أن نقوم بتصغير حجم الخطوة.

(*)يمكننا استخدام الصيغة (6) لتحديد متى نقوم بتغيير حجم الخطوة. وهناك عدة طرق مفصلة لبيان كيفية ذلك ، إلا أننا سنكتفي هنا بتوضيح متى نقوم بتصغير حجم الخطوة h إلى نصف قيمته ، أي إلى h/2 ، ومتى نقوم بتكبيره إلى ضعف قيمته ، أي إلى 2h.

نفرض أن $RelErr = 5\times10^{-6}$ هو مقياس الخطأ النسبي (relative error criterion) لدينا. ونفرض أن $Small = 10^{-5}$.

$$\text{IF } \frac{19}{270}\frac{|y_{k+1}-p_{k+1}|}{|y_{k+1}|+Small} > RelErr \quad \text{THEN Set } h = \frac{h}{2} \qquad (7)$$

$$\text{IF } \frac{19}{270}\frac{|y_{k+1}-p_{k+1}|}{|y_{k+1}|+Small} < \frac{RelErr}{100} \quad \text{THEN Set } h = 2h \qquad (8)$$

إذا لم تتفق القيمة المقدرة (/المتنبأة) والقيمة المصححة (predicted and corrected values) لخمسة أرقام معنوية (significant digits) فإن العلاقة (7) تقوم بتصغير حجم الخطوة ، بينما إذا اتفقت القيمتان لسبعة أرقام معنوية أو أكثر فإن العلاقة (8) تقوم بتكبير حجم الخطوة. [ملاحظة: يمكن أن يتم التعديل الدقيق (fine tuning) لهذه القيم الوسيطة (parameters) بما يتناسب مع جهاز الحاسوب الخاص بكم].

(*)تصغير حجم الخطوة يتطلب أربع قيم ابتدائية جديدة. ونستخدم طريقة استكمال (interpolation) الدالة f(t,y(t)) باستخدام حدودية من الدرجة الرابعة (fourth-degree polynomial) لتعطينا القيمتين الناقصتين اللتين تنصفان الفترتين $[t_{k-1},t_k]$,$[t_{k-2},t_{k-1}]$. والشكل التالي يوضح نقاط الشبكة (mesh points) الأربع:

$t_{k-3/2}, t_{k-1}, t_{k-\frac{1}{2}}, t_k$ المستخدمة في الحسابات المتتالية

شكل ٦-٢

تصغير حجم الخطوة h إلى h/2

وصيغتا الاستكمال (interpolation formulas) اللتان نحتاج إليهما للحصول على القيم الابتدائية الجديدة لحجم الخطوة h/2 هما:

$$f_{k-1/2} = \frac{-5f_{k-4} + 28f_{k-3} - 70f_{k-2} + 140f_{k-1} + 35f_k}{128}$$
$$f_{k-3/2} = \frac{3f_{k-4} - 20f_{k-3} + 90f_{k-2} + 60f_{k-1} - 5f_k}{128} \qquad (9)$$

(*)وأما تكبير حجم الخطوة فعملية أيسر. ونحتاج هنا إلى سبع نقاط ابتدائية (seven prior points) لمضاعفة حجم الخطوة. والنقاط الأربع الجديدة نحصل عليها بحذف كل نقطة ثانية على التعاقب ، كما يوضح ذلك الشكل التالي:

شكل ٦-٣

تكبير حجم الخطوة h إلى 2h

طريقة ميلن – سمبسون (The Milne-Simpson Method)

تعد هذه الطريقة من طرق التقدير والتصحيح المفضلة. وتُختار قيمتها الابتدائية (/المقدرة) (predictor) على أساس تكامل الدالة f(t,y(t)) عبر الفترة $[t_{k-3}, t_{k+1}]$:

$$y(t_{k+1}) = y(t_{k-3}) + \int_{t_{k-3}}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\, dt \qquad (10)$$

وتستخدم هذه القيمة المقدرة (predictor) حدودية لاجرانج لتقريب الدالة f(t,y(t)) بناء على النقاط

$$(t_{k-2}, f_{k-2}), (t_{k-1}, f_{k-1}), (t_k, f_k)$$

حيث تكامل هذه الحدودية على الفترة $[t_{k-3}, t_{k+1}]$. وهذا يؤدي إلى صيغة ميلن للتقدير (Milne predictor):

$$p_{k+1} = y_{k-3} + \frac{4h}{3}(2f_{k-2} - f_{k-1} + 2f_k). \qquad (11)$$

ونحصل على صيغة التصحيح بطريقة مماثلة ، حيث يمكننا الآن استخدام القيمة p_{k+1} . ونقوم بتكوين حدودية لاجرانج أخرى للدالة f(t,y(t)) بناء على النقطتين $(t_{k-1}, f_{k-1}), (t_k, f_k)$ والنقطة الجديدة

$$(t_{k+1}, f_{k+1}) = (t_{k+1}, f(t_{k+1}, p_{k+1})) .$$

ونكامل الحدودية على الفترة $[t_{k-1}, t_{k+1}]$ حيث نحصل على النتيجة التالية والتي هي صيغة سمبسون المعتادة:

$$y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{h}{3}(f_{k-1} + 4f_k + f_{k+1}). \qquad (12)$$

تقدير الخطأ وتصحيحه (Error Estimation and Correction)

تعد حدود الخطأ (error terms) في صيغ التكامل العددي المستخدمة للحصول على كل من قيمتي التنبؤ والتصحيح (predictor and corrector) من الرتبة $O(h^5)$ (order) . ويعطي خطأ الاقتطاع المحلي (ℓte) في العلاقتين (12) , (11) بالصيغتين:

$$y(t_{k+1}) - p_{k+1} = \frac{28}{90} y^{(5)}(c_{k+1}) h^5 \quad (\ell te \text{ for the predictor}). \qquad (13)$$

$$y(t_{k+1}) - y_{k+1} = \frac{-1}{90} y^{(5)}(d_{k+1}) h^5 \quad (\ell te \text{ for the corrector}). \qquad (14)$$

ونفرض الآن أن قيمة h صغيرة صغرا كافيا بحيث أن قيمة $y^{(5)}(t)$ تقريبا ثابتة على الفترة $[t_{k-3}, t_{k+1}]$. وبالتالي يمكننا حذف الحدود التي تشتمل على المشتقة الخامسة في كل من العلاقتين (14) , (13) لنحصل على النتيجة:

$$y(t_{k+1}) - p_{k+1} \approx \frac{28}{29}(y_{k+1} - p_{k+1}). \qquad (15)$$

وهذه العلاقة (15) تعطي تقديرا للخطأ (error estimate) في صيغة التنبؤ المبنية على القيمتين المحسوبتين p_{k+1}, y_{k+1} ولا تستخدم $y^{(5)}(t)$ ، ويمكن استخدامها لتحسين القيمة المقدرة. فبفرض أن الفارق بين القيمة المقدرة والقيمة المصححة عند كل خطوة يتغير ببطء ، يمكننا أن نعوض قيمتي p_k , y_k

بدلا من قيمتي p_{k+1}, y_{k+1} في (15) لنحصل على القيمة المعدلة (modifier / modified value) التالية:

$$m_{k+1} = p_{k+1} + 28\frac{y_k - p_k}{29} \qquad (16)$$

ثم نستخدم هذه القيمة المعدلة بدلا من p_{k+1} في خطوة التصحيح ، وبذلك فإن العلاقة (12) تصبح:

$$y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{h}{3}\left[f_{k-1} + 4f_k + f\left(t_{k+1}, m_{k+1}\right)\right]. \qquad (17)$$

وبالتالي فإن العلاقات التالية تعطي طريقة ميلن – سمبسون المعدَّلة :

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= y_{k-3} + \frac{4h}{3}\left(2f_{k-2} - f_{k-1} + 2f_k\right) \quad (\text{predictor}) \\ m_{k+1} &= p_{k+1} + 28\frac{y_k - p_k}{29} \qquad (\text{modifier}) \\ f_{k+1} &= f\left(t_{k+1}, m_{k+1}\right) \\ y_{k+1} &= y_{k-1} + \frac{h}{3}\left(f_{k-1} + 4f_k + f_{k+1}\right) \quad (\text{corrector}) \end{aligned} \qquad (18)$$

طريقة هامنج (Hamming's Method):

تعد هذه الطريقة من الطرق الهامة المستخدمة في حل مسائل القيمة الابتدائية. وسوف نحذف خطوات استنتاج (derivation) هذه الطريقة ، ونكتفي بإعطاء خوارزميتها في نهاية الفصل.

ملاحظة:

يلاحظ أن جميع طرق التقدير والتصحيح تواجه بصفة عامة مشاكل الاستقرار (stability problems) ، ولذلك فنحتاج أحيانا إلى أخذ احتياطات خاصة.

مثال ٦-١:

استخدم كلا من طريقة آدمز – باشفورث – مولتن ، وطريقة ميلن – سمبسون ، وطريقة هامنج ، متخذا حجم الخطوة $h=\frac{1}{8}$ ، وذلك لحساب تقريبات لحل مسألة القيمة الابتدائية

$$y'=\frac{t-y}{2};\quad y(0)=1,\quad t\in[0,3]$$

الحل:

إذا استخدمنا طريقة R-K فإننا نحصل على القيم الابتدائية

$y_1 = 0.94323919$, $y_2 = 0.89749071$, $y_3 = 0.86208736$.

ثم نطبق خوارزميات الطرق المذكورة والمعطاة في نهاية هذا الفصل لنحصل على الجدول التالي. ويلاحظ أن الأخطاء معطاة في الجدول كمضاعفات 10^{-8}. وتبلغ دقة جميع قيم الحلول المذكورة بالجدول ستة أرقام صحيحة على الأقل (at least six digits of accuracy).

k	Adams-Bashforth-Moulton	Error	Milne-Simpson	Error	Hamming's method	Error
0.0	1.00000000	0E-8	1.00000000	0E-8	1.00000000	0E-8
0.5	0.83640227	8E-8	0.83640231	4E-8	0.83640234	1E-8
0.625	0.81984673	16E-8	0.81984687	2E-8	0.81984688	1E-8
0.75	0.81186762	22E-8	0.81186778	6E-8	0.81186783	1E-8
0.875	0.81194530	28E-8	0.81194555	3E-8	0.81194558	0E-8
1.0	0.81959166	32E-8	0.81959190	8E-8	0.81959198	0E-8
1.5	0.91709920	46E-8	0.91709957	9E-8	0.91709967	-1E-8
2.0	1.10363781	51E-8	1.10363822	10E-8	1.10363834	-2E-8
2.5	1.35951387	52E-8	1.35951429	10E-8	1.35951441	-2E-8
2.625	1.43243853	52E-8	1.43243899	6E-8	1.43243907	-2E-8
2.75	1.50851827	52E-8	1.50851869	10E-8	1.50851881	-2E-8
2.875	1.58756195	51E-8	1.58756240	6E-8	1.58756248	-2E-8
3.0	1.66938998	50E-8	1.66939038	10E-8	1.66939050	-2E-8

مقارنة بين طرق آدمز – باشفورث – مولتن ، وميلن – سمبسون ، وهامنج لحل مسألة القيمة الابتدائية: $y'=(t-y)/2;\quad y(0)=1$

طرق التقدير والتصحيح وشرط الاستقرار

عند استخدام إحدى طرق التقدير والتصحيح لحل مسألة القيمة الابتدائية $y' = f(t,y);\quad y(t_0) = y_0$ على فترة كبيرة (large interval) فإنه أحيانا تنشأ بعض الصعوبات. مثلا إذا كانت $f_y(t,y) < 0$ وكان حجم الخطوة h كبيرا جدا فقد تصبح طريقة التقدير والتصحيح غير مستقرة. وكقاعدة تقريبية عملية يتحقق الاستقرار عندما ينتشر (propagates) أي خطأ صغير كخطأ متناقص (decreasing error) ، بينما يتحقق عدم الاستقرار (instability) عندما ينتشر الخطأ الصغير كخطأ متزايد (increasing error) وعندما نستخدم حجم خطوة كبيرا جدا عبر فترة كبيرة فإنه ينشأ عدم استقرار ويتضح ذلك في ظهور تذبذبات (oscillations) في قيم الحل المحسوب. ويمكن تقليل هذه التذبذبات عن طريق تصغير حجم الخطوة. والصيغ السابقة (9) $\rightarrow$ (7) تبين كيفية تعديل الخوارزميات. وعندما نستخدم أسلوب التحكم (control) في حجم الخطوة ، فعلينا حينئذ استخدام صيغ تقدير الخطأ (error estimates) التالية:

$$y(t_k) - y_k \approx 19\frac{p_k - y_k}{270}\ (\text{Adams - Bashforth - Moulton}), \quad (19)$$

$$y(t_k) - y_k \approx \frac{p_k - y_k}{29}\ (\text{Milne - Simpson}), \quad (20)$$

$$y(t_k) - y_k \approx 9\frac{p_k - y_k}{121}\ (\text{Hamming}), \quad (21)$$

وفي جميع الطرق تكون خطوة التصحيح (corrector step) من نوع تكرير النقطة الثابتة (fixed-point iteration). ويمكن إثبات أن حجم الخطوة h في هذه الطرق يجب أن يحقق الشروط التالية:

$$h << \frac{2.66667}{|f_y(t,y)|}\ (\text{Adams - Bashforth - Moulton}), \quad (22)$$

$$h << \frac{3.00000}{|f_y(t,y)|}\ (\text{Milne - Simpson}), \quad (23)$$

$$h << \frac{2.66667}{\left| f_y(t,y) \right|} \quad (\text{Hamming}), \tag{24}$$

والمثال التالي يبين أنه يجب استخدام الشروط الأكثر صرامة (more stringent) التالية:

$$h < \frac{0.75}{\left| f_y(t,y) \right|} \quad (\text{Adams - Bashforth - Moulton}), \tag{25}$$

$$h < \frac{0.45}{\left| f_y(t,y) \right|} \quad (\text{Milne - Simpson}), \tag{26}$$

$$h < \frac{0.69}{\left| f_y(t,y) \right|} \quad (\text{Hamming}). \tag{27}$$

ويمكن الوصول إلى المتباينة (27) في الكتب المتقدمة في موضوع التحليل العددي. وأما المتباينتان (26) , (25) فتبدوان مناسبتين لهذا المثال.

مثال ٦-٢:

استخدم كلاً من طريقة آدمز – باشفورث – مولتن ، وطريقة ميلن – سمبسون ، وطريقة هامنج لحساب تقريبات لحل مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = 30 - 5y; \quad y(0) = 1, \quad t \in [0,10]$$

الحل :

الطرق الثلاث جميعها من الرتبة $O(h^4)$ (order). وعند استخدام عدد N = 120 من الخطوات (steps) لكل من الطرق الثلاث ، لوحظ أن أكبر خطأ (maximum error) في كل طريقة يحدث في موضع مختلف:

$y(0.41666667) - y_5 \approx -0.00277037$ (Adams-Bashforth-Moulton),

$y(0.33333333) - y_4 \approx -0.00139255$ (Milne-Simpson) ,

$y(0.33333333) - y_4 \approx -0.00104982$ (Hamming).

وعند نقطة النهاية اليمنى t = 10 (right endpoint) كانت قيمة الخطأ:

$y(10) - y_{120} \approx 0.00000000$ (Adams-Bashforth-Moulton),
$y(10) - y_{120} \approx 0.00001015$ (Milne-Simpson) ,
$y(10) - y_{120} \approx 0.00000000$ (Hamming).

ويلاحظ أن كلا من طريقة آدمز – باشفورث – مولتن وطريقة هامنج تعطي حلولا تقريبية تبلغ دقتها ثمانية أرقام (eight digits of accuracy) عند نقطة النهاية اليمنى.

ومن الظواهر التي يمكن ملاحظتها أو اختبارها عمليا تذبذب الحل المحسوب حول الحل الصحيح (true solution) عندما يكون حجم الخطوة كبيرا جدا. والشكل التالي (شكل ٦–٤) يوضح هذه الظاهرة. وقد تم عمليا (experimentally) تحديد العدد الصغير اللازم من الخطوات كي تكون قيم هذه الذبذبات متساوية تقريبا.

وأما العدد الكبير من الخطوات الذي يلزم لإضعاف / إخماد هذه التذبذبات (attenuate the oscillations) فيتم تحديده بالمعادلات (25) $\rightarrow$ (27).

شكل ٦–٤–أ

يوضح شكل ٦–٤–أ الذبذبات الناتجة عند حل المعادلة التفاضلية $y' = 30 - 5y$ باستخدام طريقة آدمز – باشفورث – مولتن ، وبأخذ عدد الخطوات $N = 37$. ويلاحظ أن الحل يصبح مستقرا (stabilized) عندما $N = 65$ ، وذلك لأن:

$$h = 10/65 = 0.1538 \approx 0.15 = 0.75/5 = 0.75/|f_y(t,y)|.$$

شكل ٦–٤–ب

ويوضح شكل ٦-٤-ب الذبذبات الناتجة عند حل المعادلة التفاضلية $y' = 30 - 5y$ باستخدام طريقة ميلن – سمبسون ، وبأخذ عدد الخطوات N = 93. ويلاحظ أن الحل يصبح مستقرا عندما N = 110 ، وذلك لأن

$$h = 10/110 = 0.0909 \approx 0.09 = 0.45/5 = 0.45/|f_y(t,y)|.$$

شكل ٦-٤-ج

ويوضح شكل ٦-٤-ج الذبذبات الناتجة عند حل المعادلة التفاضلية $y' = 30 - 5y$ باستخدام طريقة هامنج وبأخذ عدد الخطوات N = 50. ويلاحظ أن الحل يصبح مستقرا عندما N = 70 ، وذلك لأن

$$h = 10/70 = 0.1428 \approx 0.138 = 0.69/5 = 0.69/|f_y(t,y)|.$$

* * *

وفي ختام هذا الفصل نلخص خوارزميات طرق التقدير والتصحيح التي أشرنا إليها والمستخدمة في حل مسائل القيمة الابتدائية.

خوارزمية طريقة آدمز – باشفورث – مولتن
(Adams-Bashforth-Moulton Algorithm)

تستخدم هذه الطريقة لإيجاد حل تقريبي لمسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t,y); \quad y(a) = y_0 , \quad t \in [a,b]$$

بتطبيق صيغتي التقدير والتصحيح التاليتين:

Predictor

$$p_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}[-9f_{k-3} + 37f_{k-2} - 59f_{k-1} + 55f_k]$$

corrector

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}[f_{k-2} - 5f_{k-1} + 19f_k + 9f_{k+1}]$$

```
INPUT A, B, Y(0)                          {Endpoint and initial value}
INPUT N                                   {Number of steps, N > 3}
H := [B - A]/N                            {Compute the step size}
T(0) := A, F0 := F(T(0), Y(0))

FOR K = 1 TO 3 DO          {Either input three additional starting
  T(K) := A + K*H          values or compute them using the Runge-
  Get Y(K)                 Kutta method}

F1 := F(T(l),Y(l)), F2 := F(T(2),Y(2)), F3 := F(T(3),Y(3))
H2 := H/24                                {Saves wasted computations}

FOR K = 3 TO N-1 DO
  P := Y(K)+H2*[-9*F0+37*F1-59*F2+55*F3]          {Predictor}
  T(K+1) := A + H*[K+1]                           {Next abscissa}
  F4 := F(T(K+1),P)                               {Evaluate f(t,y)}
  Y(K+1) := Y(K)+H2*[F1-5*F2+19*F3+9*F4]          {Corrector}
  F0 := F1, F1 := F2 , F2 := F3                   {Update
  F3 := F(T(K+1),Y(K+1))                          the values}

FOR K = 0   TO   N DO
  PRINT T(K), Y(K)                                {Output}
```

خوارزمية طريقة ميلن – سمبسون

(Milne – Simpson Algorithm)

تستخدم هذه الطريقة لإيجاد حل تقريبي لمسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t,y); \quad y(a) = y_0 , \quad t \in [a,b]$$

بتطبيق صيغتي التقدير والتصحيح التاليتين:

predictor

$$p_{k+1} = y_{k-3} + \frac{4h}{3}[2f_{k-2} - f_{k-1} + 2f_k]$$

corrector

$$y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{h}{3}[f_{k-1} + 4f_k + f_{k+1}].$$

```
   INPUT A, B, Y(0)                    {Endpoints and initial value}
   INPUT N                             {Number of steps, n > 3}
   H := [B-A]/N                        {Compute the step size}
   T(0) := A                           {Initialize}

FOR K = 1 TO 3 DO                      {Either input three additional
   T(K) := A + K*H                     starting values or compute them
   Get Y(K)                            using the Rung-Kutta Method}

   F1 := F(T(1),Y(1)), F2 := F(T(2),Y(2)), F3 := F(T(3),Y(3)),
   Pold := 0, Yold := 0                {Initialize}

FOR K = 3 TO N-1 DO
   Pnew := Y(K-3) + 4*H*[2*F1-F2+2*F3]/3     {Milne predictor}
   Pmod := Pnew + 28*[Yold - Pold]/29         {Modifier}
   T(K+1) := A + H*[K+1]                      {New mesh point}
   F4 := F(T(K+1), Pmod)                      {Function value}
   Y(K+1) := Y(K-1) + H*[F2+4*F3+F4]/3        Simpson corrector}
   Pold := Pnew, Yold := Y(K+1)               {Update
   F1 := F2, F2 := F3, F3 := F(T(K+1),Y(K+1))  values}
END

FOR K=0   TO   N DO
   PRINT T(K), Y(K)                    {Output}
```

خوارزمية طريقة هامنج (The Hamming Algorithm)

تستخدم هذه الطريقة لإيجاد حل تقريبي لمسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t,y); \quad y(a) = y_0, \quad t \in [a,b]$$

باستخدام صيغتي التقدير والتصحيح التاليتين:

predictor

$$p_{k+1} = y_{k-3} + \frac{4h}{3}\left[2f_{k-2} - f_{k-1} + 2f_k\right]$$

corrector

$$y_{k+1} = \frac{-y_{k-2}+9y_k}{8} + \frac{3h}{8}\left[-f_{k-1} + 2f_k + f_{k+1}\right].$$

```
    INPUT A, B, Y(0)                    {Endpoints and initial value}
    INPUT N                             {Number of steps, N >3}
    H := [B-A]/N                        {Compute the step size}
    T(0) := A                           {Initialize}

  FOR K=1 TO 3 DO          {Either input three additional starting
  |   T(K) := A + K*H       values or compute them using the Runge-
  |_  Get Y(K)              Kutta method}

    F1 := F(T(1),Y(1)), F2 := F(T(2),Y(2)), F3 := F(T(3),Y(3)),
    Pold := 0, Cold := 0                {Initialize}

FOR  K=3  TO  N-1  DO
|   Pnew := Y(K-3)+4*H*[2*F1-F2+2*F3]/3          {Milne predictor}
|   Pmod := Pnew + 112*[Cold – Pold]/121          {Modifier}
|   T(K+1) := A + H*[K+1]                        {New mesh point}
|   F4 := F(T(K+1), Pmod)                        {Function value}
|   Cnew := [9*Y(K)-Y(K-2) + 3*H*[-F2+2*F3+F4]]/8   {Hamming corrector}
|   Y(K+1) := Cnew + 9*[Pnew - Cnew]/121         {New value yk+1}
|   Pold := Pnew, Cold := Cnew                   {Update
|   F1 := F2, F2 := F3, F3 := F(T(K+1), Y(K+1))   values}
END

FOR K=0  TO  N  DO
|_  PRINT T(K), Y(K)                            {Output}
```

تمرينات رقم ٦

٦-١) نفرض أن لدينا مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(x,y) \equiv -y\,; \qquad y(0) = 1$$

وأننا سنقوم بحلها باستخدام طريقة " ميلن – سمبسون " للتقدير والتصحيح:

Predictor: $y_{i+1} = y_{i-3} + \frac{4h}{3}(2f_{i-2} - f_{i-1} + 2f_i),$

Corrector: $y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{h}{3}(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1})$

حيث: $i = 0,1,2,\ldots \;\; ; \;\; f_i \equiv f(x_i, y_i)$

ونفرض أن حجم الخطوة $h = 0.1$. احسب قيمة y عند $x = 0.4$ مقربا إجابتك إلى ثلاثة أرقام عشرية. وقارن مع النتيجة التي نحصل عليها باستخدام طريقة تايلور (المسألة ٤-٢).

ملاحظة:

خذ أي قيم ابتدائية إضافية (extra starting values) تحتاجها من الحل بطريقة تايلور.

٦-٢) يمكن كتابة حل مسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dy}{dx} - 3x^2 y = 1 - 3x^3\,; \quad y(0) = 1$$

في صيغة متسلسلة القوى

$$y = 1 + x + x^3 + O(x^5)$$

(انظر المسألة ٤-٦). استخدم هذه الصيغة لتحصل على قيم ابتدائية (starting values) للحل عند النقاط

$$x = -0.2\,, \quad -0.1\,, \quad 0.1\,, \quad 0.2$$

ومن ثم استخدم صيغتي التقدير والتصحيح التاليتين لحساب قيمة y عند $x = 0.3$ وذلك لرقمين عشريين:

P: $y_{i+1} = y_{i-3} + \frac{4h}{3}(2y'_{i-2} - y'_{i-1} + 2y'_i)$,

C: $y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{h}{3}(y'_{i-1} + 4y'_i + y'_{i+1})$,

٦-٣) نفرض أن المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} + y = x$ مع الشرط الابتدائي $y(0)=1$ (والتي حلها الصحيح هو: $y(x) = x - 1 + 2e^{-x}$) ستحل عدديا بطريقة التقدير والتصحيح ، وأن معادلة تقدير القيم التقريبية هي:

P: $y_{i+1} = y_i + h\, y'_i$

ومعادلة تصحيح هذه القيم هي:

C: $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[y'_i + y'_{i+1}]$

المطلوب :

(أ) استخدام هذه الطريقة (حيث $h = 0.1$) لإيجاد قيم y عند النقاط $x = 0.1, 0.2, 0.3$ وذلك لثلاثة أرقام عشرية.

(ب) استخدام هذه القيم لحساب قيمة y (لثلاثة أرقام عشرية أيضا) عند $x = 0.4$ بتطبيق طريقة التقدير والتصحيح ، ولكن باستعمال المعادلتين التاليتين:

P: $y_{i+1} = y_{i-3} + \frac{4h}{3}[2y'_i - y'_{i-1} + 2y'_{i-2}]$

C: $y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{h}{3}[y'_{i+1} + 4y'_i + y'_{i-1}]$

(ج) حساب الخطأ في كل من القيم السابقة التي حصلتم عليها في (أ) ، (ب).

٦-٤) نفرض أننا سنقوم بحل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = -y; \qquad y|_{x=-1} = 1$$

باستخدام معادلتي التقدير والتصحيح التاليتين ، حيث حجم الخطوة يساوي h:

Predictor: $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(3y'_i - y'_{i-1})$

Corrector: $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(y'_{i+1} + y'_i)$

(أ) لأي قيم لحجم الخطوة h تكون معادلة التصحيح مستقرة ؟

(ب) باستخدام نظام التقدير والتصحيح (predictor-corrector system) المعطى ، أوجد قيمة y صحيحة لرقم عشري واحد عند $x = 1$. احصل على أي قيم ابتدائية إضافية تحتاجها من صيغ رونج–كوتا.

٦–٥) نفرض أن مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = x - 0.1\,y^2 ; \qquad y(0) = 1$$

ستحل بتطبيق نظام التقدير والتصحيح التالي:

Predictor: $y_{i+1} = y_{i-3} + \frac{4h}{3}(2y'_{i-2} - y'_{i-1} + 2y'_i)$

Corrector: $y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{h}{3}(y'_{i-1} + 4y'_i + y'_{i+1})$

ونفرض أن القيم الابتدائية التالية قد حصلنا عليها:

x	−0.2	−0.1	0.1	0.2
y	1.04068	1.01513	0.99507	1.00013

أوجد لأربعة أرقام عشرية قيمة y عند $x = 0.3$. وقارن مع الحل الذي نحصل عليه باستخدام طريقة أويلر وبأخذ حجم الخطوة $h = 0.1$ (انظر المسألة ٢–١).

٦–٦) أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dy}{dx} - x + \frac{1}{y} = 0 ; \quad y(0) = 1$$

من $x = 0$ إلى $x = 0.2$ ، باستخدام نظام التقدير والتصحيح التالي ، وبأخذ حجم الخطوة $h = 0.1$ ، وبحيث تحصل على دقة تبلغ ثلاثة أرقام عشرية صحيحة (accuracy of 3 correct decimals) في نتائجك:

صيغة التقدير : Predictor:

متسلسلة تايلور حتى الحد الذي يحتوي على القوة الثانية ، بما في ذلك هذا الحد نفسه (up to and including the second power term)

صيغة التصحيح : Corrector:

صيغة شبه المنحرف للتصحيح

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(y'_i + y'_{i+1}\right)$$

٦-٧) نفرض أن لدينا مسألة القيمة الابتدائية

$$y' \equiv f(x,y) = a\,y\,; \quad y(0) = 1$$

(أ) اثبت أن صيغة شبه المنحرف للتصحيح (trapezoidal corrector formula)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right]$$

تؤدي إلى معادلة فروق (difference equation) حلها هو:

$$y_n = \left(\frac{1+\frac{a\,h}{2}}{1-\frac{a\,h}{2}}\right)^n$$

(ب) ادرس كلا من تقارب (convergence) واستقرار (stability) النظام السابق.

[إرشاد: للتقارب تحتاج لإثبات أن

$$\lim_{h\to 0} y_n = y(x_n) \equiv e^{a x_n}$$

وذلك لقيمة محددة [$x = x_n = n\,h$ (fixed value of x)]

(ج) باستخدام صيغة شبه المنحرف للتصحيح وبأخذ $h = 0.1$ أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = 10\,y, \quad y(0) = 1$$

بعد عدد n من الخطوات ، وقارن النتيجة التي تحصل عليها (بفرض أنه لا توجد أخطاء تقريب rounding errors) مع الحل المضبوط (exact solution).

(د) ما هي النتيجة التي نحصل عليها في (ج) إذا كانت طريقة الحل هي أن نقدر y_{i+1} (predict) لكل i باستخدام صيغة أويلر ثم نصحح y_{i+1} (correct) باستخدام صيغة شبه المنحرف للتصحيح مرة واحدة فقط؟

٦-٨) ابحث استقرار صيغة التصحيح (corrector formula)

$$y_{i+1} - y_i = h\,y'_{i+1}$$

(حيث y'_i تعني $\frac{dy(x)}{dx}$ عند $x = x_i$)

عندما تطبق على مسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dy(x)}{dx} - y(x) = 0; \quad y(0) = 1.$$

٦-٩) نفرض أننا سنقوم بحل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(x,y) = y; \quad y(0) = 1$$

باستخدام نظام التقدير والتصحيح التالي:

(1) Predictor: $y_{i+1} = y_i + h\,f_i, \quad i = 0,1,2,...$

(2) Corrector: $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}h\,(f_i + f_{i+1}), \quad i = 0,1,2,...$

حيث $f_i \equiv f\,(x_i, y_i)$.

احسب قيمة y عند $x = 0.1$ (اعتبر أن حجم الخطوة $h = 0.1$) باستخدام معادلة أويلر للتقدير (1) (Predictor Euler's Equation) لتقدير قيمة أولية لـ y ، ثم تحسين (improving) هذه القيمة باستخدام معادلة التصحيح (2) تكراريا (أي عدة مرات) (repeatedly) حتى يصبح التغير (change) في القيم المتعاقبة (successive values) المحسوبة طفيفا (little) ، مع تقريب إجابتك لأربعة أرقام عشرية (four decimal places).

* * *

في المسائل التالية من ٦-١٠) إلى ٦-١٩):

(أ) استخدم أيا من طرق التقدير والتصحيح الثلاث (طريقة آدمز – باشفورث – مولتن ، وطريقة ميلن – سمبسون ، وطريقة هامنج) ، والقيم الابتدائية (starting values) الثلاث المعطاة y_1, y_2, y_3 ، وحجم الخطوة h = 0.05 لحساب القيمة التالية y_4 في مسألة القيمة الابتدائية المعطاة.

(ب) استخدم حاسوبا لحل مسألة القيمة الابتدائية المعطاة في (أ) في الفترة المعطاة [a , b] باسخدام أي من طرق التقدير والتصحيح المشار إليها. استخدم القيم الابتدائية الثلاث المعطاة y_1, y_2, y_3 أو قم بتوليدها بطريقة رونج – كوتا.

(ج) قارن الأجوبة التي حصلت عليها في (ب) مع القيم التي تحصل عليها من الحل الصحيح المعطى y(t).

٦-١٠) (أ) $y' = t^2 - y; \quad y(0) = 1$

(ب) [a , b] = [0 , 0.5]

y(0.05) = 0.95127058, y(0.10) = 0.90516258, y(0.15) = 0.86179202

(ج) $y(t) = -\exp(-t) + t^2 - 2t + 2$

٦-١١) (أ) $y' = y + 3t - t^2\,; \quad y(0) = 1$

(ب) $[a\,,\,b] = [0\,,\,5]$

$y(0.05) = 1.0550422,\ y(0.10) = 1.1203418,\ y(0.15) = 1.1961685$

(ج) $y(t) = 2\exp(t) + t^2 - t - 1$

٦-١٢) (أ) $y' = -t/y\,; \quad y(1) = 1$

(ب) $[a\,,\,b] = [1\,,\,1.4]$

$y(1.05) = 0.94736477,\ y(1.10) = 0.88881944,\ y(1.15) = 0.82310388$

(ج) $y(t) = \left(2 - t^2\right)^{1/2}$

٦-١٣) (أ) $y' = \exp(-t) - y\,; \quad y(0) = 1$

(ب) $[a\,,\,b] = [0\,,\,5]$

$y(0.05) = 0.99879090,\ y(0.10) = 0.99532116,\ y(0.15) = 0.98981417$

(ج) $y(t) = t\exp(-t) + \exp(-t)$

٦-١٤) (أ) $y' = 2ty^2\,; \quad y(0) = 1$

(ب) $[a\,,\,b] = [0\,,\,0.95]$

$y(0.05) = 1.0025063,\ y(0.10) = 1.0101010,\ y(0.15) = 1.0230179$

(ج) $y(t) = 1/\left(1 - t^2\right)$

٦-١٥) (أ) $y' = 1 + y^2\,; \quad y(0) = 1$

(ب) $[a\,,\,b] = [0\,,\,0.75]$

$y(0.05) = 1.1053556,\ y(0.10) = 1.2230489,\ y(0.15) = 1.3560879$

(ج) $y(t) = \tan(t + \pi/4)$

٦-١٦) (أ) $y' = 2y - y^2\,; \quad y(0) = 1$

(ب) $[a\,,\,b] = [0\,,\,5]$

$y(0.05) = 1.0499584,\ y(0.10) = 1.0996680,\ y(0.15) = 1.1488850$

(ج) $y(t) = 1 + \tanh(t)$

٦-١٧) (أ) $y' = \left[1 - y^2\right]^{1/2}; \quad y(0) = 0$

(ب) [a , b] = [0 , 1.55]

y(0.05) = 0.049979169, y(0.10) = 0.099833417, y(0.15) = 0.14943813

(ج) $y(t) = \sin(t)$

٦-١٨) (أ) $y' = y^2 \sin(t); \quad y(0) = 1$

(ب) [a , b] = [0 , 1.55]

y(0.05) = 1.0012513, y(0.10) = 1.0050209, y(0.15) = 1.0113564

(ج) $y(t) = \sec(t)$

٦-١٩) (أ) $y' = 1 - y^2 \; ; \quad y(0) = 0$

(ب) [a , b] = [0 , 5]

y(0.05) = 0.049958375, y(0.10) = 0.099667995, y(0.15) = 0.14888503

(ج) $y(t) = [1 - \exp(-2t)]/[1 + \exp(-2t)]$

الفصل السابع

نظم المعادلات التفاضلية
Systems of Differential Equations

نفرض أن لدينا مسألة القيمة الابتدائية

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t,x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(t,x,y) \end{aligned} \quad \begin{cases} x(t_0) = x_0, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \qquad (1)$$

أحد حلول هذه المسألة عبارة عن دالتين قابلتين للتفاضل $x(t)$, $y(t)$ (a pair of differentiable functions) تحققان الخاصية التالية: إذا تم تعويض $t, x(t), y(t)$ في كل من $f(t,x,y)$, $g(t,x,y)$ فإننا نحصل – على الترتيب – على المشتقتين $x'(t)$, $y'(t)$ ، أي أن:

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t,x(t),y(t)) \\ y'(t) &= g(t,x(t),y(t)) \end{aligned} \quad \begin{cases} x(t_0) = x_0 , \\ y(t_0) = y_0 . \end{cases} \qquad (2)$$

مثلا نفرض أن لدينا نظام المعادلات التفاضلية

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + 2y \\ \frac{dy}{dt} &= 3x + 2y \end{aligned} \quad \begin{cases} x(0) = 6, \\ y(0) = 4. \end{cases} \qquad (3)$$

حل مسألة القيمة الابتدائية (3) هو:

$$\begin{aligned} x(t) &= 4e^{4t} + 2e^{-t}, \\ y(t) &= 6e^{4t} - 2e^{-t}. \end{aligned} \qquad (4)$$

ويمكن التحقق من صحة هذا الحل بتعويض $x(t)$, $y(t)$ مباشرة في الطرف الأيمن في (3) وحساب مشتقات (4) ، وتعويضها في الطرف الأيسر في (3) لنحصل على المتطابقتين

$$16e^{4t} - 2e^{-t} = \left(4e^{4t} + 2e^{-t}\right) + 2\left(6e^{4t} - 2e^{-t}\right),$$
$$24e^{4t} + 2e^{-t} = 3\left(4e^{4t} + 2e^{-t}\right) + 2\left(6e^{4t} - 2e^{-t}\right).$$

الحلول العددية (Numerical Solutions)

يمكن الحصول على حل عددي لمسألة القيمة الابتدائية (1) عبر الفترة $a \le t \le b$ عن طريق الأخذ في الاعتبار التفاضلين:

$$dx = f(t,x,y)\,dt, \qquad dy = g(t,x,y)\,dt \qquad (5)$$

من السهل صياغة طريقة أويلر لحل هذا النظام. إذا قمنا بتعويض التفاضلات

$$dt = t_{k+1} - t_k\ ,$$
$$dx = x_{k+1} - x_k\ ,$$
$$dy = y_{k+1} - y_k$$

في العلاقة (5) فإننا نحصل على:

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x_k &\approx f(t_k, x_k, y_k)(t_{k+1} - t_k\ ), \\ y_{k+1} - y_k &\approx g(t_k, x_k, y_k)(t_{k+1} - t_k\ ). \end{aligned} \qquad (6)$$

ثم نقوم بتقسيم الفترة المعطاة إلى عدد M من الفترات الجزئية ، حيث عرض كل منها يساوي $h = (b - a)/M$. وتكون نقاط الشبكة (mesh points) هي: $t_{k+1} = t_k + h$ وبتعويض هذه القيم في العلاقة (6) نحصل على العلاقات / الصيغ الارتدادية (recursive formulas) التالية لطريقة أويلر:

$$\begin{aligned} &t_{k+1} = t_k + h\ , \\ &x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k, y_k), \\ &y_{k+1} = y_k + hg(t_k, x_k, y_k); \qquad k = 0,1,...,M-1. \end{aligned} \qquad (7)$$

فإذا أردنا الحصول على درجة معقولة من الدقة وجب علينا استخدام طريقة ذات رتبة أعلى (higher-order) ، كطريقة رونج – كوتا من الرتبة الرابعة مثلا:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{6}(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4),$$
$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(g_1 + 2g_2 + 2g_3 + g_4). \qquad (8)$$

حيث

$$f_1 = f(t_k, x_k, y_k),$$
$$g_1 = g(t_k, x_k, y_k),$$
$$f_2 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2}f_1, y_k + \frac{h}{2}g_1\right),$$
$$g_2 = g\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2}f_1, y_k + \frac{h}{2}g_1\right),$$
$$f_3 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2}f_2, y_k + \frac{h}{2}g_2\right),$$
$$g_3 = g\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2}f_2, y_k + \frac{h}{2}g_2\right),$$
$$f_4 = f(t_k + h, x_k + hf_3, y_k + hg_3),$$
$$g_4 = g(t_k + h, x_k + hf_3, y_k + hg_3).$$

مثال ٧-١:

طبق طريقة رونج – كوتا [والمعطاة بالعلاقة (8)] لحساب الحل العددي لنظام المعادلات التفاضلية (3) عبر الفترة [0.2 , 0.0] باستخدام 10 فترات جزئية (subintervals) ، حيث حجم الخطوة h = 0.02.

الحل:

بالنسبة للنقطة الأولى $t_1 = 0.02$ نعطي فيما يلي الحسابات التفصيلية المطلوبة لحساب قيمتي x_1 , y_1 ،

$$f_1 = f(0.00,6.0,4.0) = 14.0 \qquad g_1 = g(0.00,6.0,4.0) = 26.0$$
$$x_0 + \frac{h}{2}f_1 = 6.14, \qquad y_0 + \frac{h}{2}g_1 = 4.26,$$
$$f_2 = f(0.01,6.14,4.26) = 14.66 \qquad g_2 = g(0.01,6.14,4.26) = 26.94$$
$$x_0 + \frac{h}{2}f_2 = 6.1466, \qquad y_0 + \frac{h}{2}g_2 = 4.2694,$$
$$f_3 = f(0.01, 6.1466, 4.2694) = 14.6854,$$
$$g_3 = g(0.01, 6.1466, 4.2694) = 26.9786,$$
$$x_0 + hf_3 = 6.293708, \qquad y_0 + hg_3 = 4.539572,$$

$$f_4 = f(0.02, 6.293708, 4.539572) = 15.372852,$$
$$g_4 = g(0.02, 6.293708, 4.539572) = 27.960268.$$

والآن نستخدم هذه القيم لحساب القيمتين المطلوبتين x_1 , y_1 :

$$x_1 = 6 + \frac{0.02}{6}(14.0 + 2\times 14.66 + 2\times 14.6854 + 15.372852) = 6.29354551,$$
$$y_1 = 4 + \frac{0.02}{6}(26.0 + 2\times 26.94 + 2\times 26.9786 + 27.960268) = 4.53932490.$$

وبالمثل يمكن إجراء حسابات باقي قيم x_k , y_k . والجدول التالي يلخص نتائج هذه الحسابات.

k	t_k	x_k	y_k
0	0.00	6.00000000	4.00000000
1	0.02	6.29354551	4.53932490
2	0.04	6.61562213	5.11948599
3	0.06	6.96852528	5.74396525
4	0.08	7.35474319	6.41653305
5	0.10	7.77697287	7.14127221
6	0.12	8.23813750	7.92260406
7	0.14	8.74140523	8.76531667
8	0.16	9.29020955	9.67459538
9	0.18	9.88827138	10.6560560
10	0.20	10.5396230	11.7157807

حل النظام $x'(t) = x + 2y, \quad y'(t) = 3x + 2y$

مع القيم الابتدائية $x(0) = 6, \quad y(0) = 4$

بطريقة رونج – كوتا

وتحتوي الحلول العددية على قدر معين من الخطأ في كل خطوة. وفي هذا المثال يتزايد الخطأ حتى يصل إلى قيمته العظمى عند النقطة أقصى اليمين (right endpoint) t = 0.2:

$$x(0.2) - x_{10} = 10.5396252 - 10.5396230 = 0.0000022,$$
$$y(0.2) - y_{10} = 11.7157841 - 11.7157807 = 0.0000034.$$

المعادلات التفاضلية ذات الرتب العالية
(Higher-Order Differential Equations)

تشتمل المعادلات التفاضلية ذات الرتب الأعلى من الرتبة الأولى على المشتقات الأعلى من المشتقة الأولى: $x''(t),\ x'''(t),\ \ldots$. وتظهر هذه المعادلات في النماذج الرياضية (mathematical models) لمسائل التطبيقات الهندسية والفيزيائية. فمثلا المعادلة التفاضلية

$$m\,x''(t) + c\,x'(t) + k\,x(t) = g(t)$$

تمثل نظاما ميكانيكيا يستعيد فيه زنبرك (spring) – له ثابت زنبركي k (spring constant) – كتلة m مزاحة (displaced) عن موضعها الأصلي إلى هذا الموضع. ويفترض أن يكون تضاؤل (damping) الذبذبات متناسبا طرديا مع السرعة ، وتمثل الدالة g(t) قوة خارجية (external force) . ومن المعتاد أن يكون موضع الكتلة (أي إزاحتها) $x(t_0)$ وسرعتها $x'(t_0)$ معلومين عند زمن معين t_0.

ومن المعادلة السابقة يمكننا الحصول على علاقة تعطي المشتقة الثانية $x''(t)$ ، وبالتالي يمكننا كتابة مسألة قيمة ابتدائية من الرتبة الثانية (second order ivp) في الصيغة

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t)); \quad x(t_0) = x_0, x'(t_0) = y_0. \qquad (9)$$

ويمكننا إعادة صياغة المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية كنظام مكون من معادلتين تفاضليتين من الرتبة الأولى إذا استخدمنا التعويض

$$x'(t) = y(t) \qquad (10)$$

حيث يصبح عندئذ $x''(t) = y'(t)$ ، وتصبح المعادلة التفاضلية المعطاة في (9) مكافئة للنظام التالي:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= f(t,x,y) \end{aligned} \qquad \begin{cases} x(t_0) = x_0, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{11}$$

ويمكن استخدام طريقة عددية [كطريقة رونج – كوتا مثلا] لحل (2) وستقوم بتوليد متتابعتين $\{x_k\},\{y_k\}$. المتتابعة $\{x_k\}$ هي الحل العددي المطلوب للعلاقة (9) .. والمثال التالي يمكن تفسيره على أنه يعبر عن الحركة التوافقية / التذبذبية المتضائلة (damped harmonic motion).

مثال ٧–٢:

احسب حل مسألة القيمة الابتدائية

$$x''(t) - 0.1\left(1 - x^2(t)\right)x'(t) + x(t) = 0\,;\, x(0) = 1,\, x'(0) = 0$$

عند $t = 0.2$ باستخدام طريقة رونج – كوتا لحل نظام من معادلتين من الرتبة الأولى ، وبأخذ $h = 0.2$. قرِّب نتائجك لثلاثة أرقام عشرية.

الحل:

النظام التالي من الرتبة الأولى مكافئ لمسألة القيمة الابتدائية المعطاة:

$$\frac{dx}{dt} = y \equiv f(t,x,y)$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + 0.1\left(1 - x^2\right)y \equiv g(t,x,y)$$

مع الشرطين الابتدائيين: $x(0) = 1 \equiv x_0\,;\quad y(0) = 1 \equiv y_0$

وعندما $h = 0.2$ فإن النقطة الأولى (وهي النقطة المطلوب حل المسألة عندها) تساوي :

$$t_1 = t_0 + h = 0 + 0.2 = 0.2$$

ويمكننا الحصول على x_1, y_1 {القيمة المطلوبة هي x_1} من (8) بوضع $k = 0$ ، فنحصل على النتائج التالية:

$$f_1 = f(t_0, x_0, y_0) = f(0,1,0) = 0$$

$$g_1 = g(t_0, x_0, y_0) = g(0,1,0) = -1 + 0.1(1-1).0 = -1$$

$$f_2 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h}{2}.f_1, y_0 + \frac{h}{2}.g_1\right) = y_0 + \frac{h}{2}.g_1 =$$

$$= 0 + \frac{0.2}{2}.(-1) = -0.1$$

$$g_2 = g\left(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h}{2}.f_1, y_0 + \frac{h}{2}.g_1\right) = g(0.1,1,-0.1) =$$

$$= -1 + 0.1(1-1)(-0.1) = -1$$

$$f_3 = y_0 + \frac{h}{2}g_2 = 0.1(-1) = -0.1$$

$$g_3 = -0.99 + 0.1\left(1 - 0.99^2\right)(-0.1) \approx -0.99$$

$$f_4 = y_0 + hg_3 = 0.2(-0.99) = -0.198$$

$$g_4 = -0.98 + 0.1\left(1 - 0.98^2\right)(-0.2 * 0.99) \approx -0.98$$

وبتعويض هذه القيم نستطيع إيجاد قيمتي x_1, y_1 :

$$x_1 = x_0 + \frac{h}{6}(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4)$$

$$= 1 + \frac{0.2}{6}(0 - 0.2 - 0.2 - 0.198) \approx 0.98$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(g_1 + 2g_2 + 2g_3 + g_4)$$

$$= 0 + \frac{0.2}{6}(-1 - 2 - 1.98 - 0.98) \approx 0.199$$

الحل المطلوب هو القيمة $x_1 = 0.98$ عند $t_1 = 0.2$. وإذا أردنا الحصول على الحل عند النقاط التالية $t_2, t_3, t_4, \cdots$ فإننا نعتبر الآن أن لدينا النقطة الجديدة $(t_1, x_1, y_1) = (0.2, 0.98, -0.199)$ ، ونخطو الخطوة التالية بوضع k = 1 في العلاقة (8) لنحصل على x_2, y_2 عند $t_2 = t_1 + h = 0.2 + 0.2 = 0.4$ ، وهكذا تستمر الحسابات بالكيفية السابقة.

مثال ٧-٣:

نفرض أن لدينا مسألة القيمة الابتدائية من الرتبة الثانية

$$x''(t) + 4x'(t) + 5x(t) = 0; \quad x(0) = 3, x'(0) = -5.$$

(أ) اكتب النظام المكافئ (equivalent system) المكون من معادلتين من الرتبة الأولى.

(ب) استخدم طريقة رونج – كوتا لحل المسالة بعد إعادة صياغتها ، وذلك عبر الفترة [0,5] باستخدام عدد من الفترات الجزئية (subintervals) يساوي (M = 50) حيث حجم الخطوة يساوي$h = 0.1$.

(ج) قارن الحل العددي بالحل الصحيح

$$x(t) = 3e^{-2t}\cos(t) + e^{-2t}\sin(t)$$

الحل:

المعادلة التفاضلية يمكن كتابتها في الصورة التالية

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t)) = -4x'(t) - 5x(t).$$

باستخدام التعويض المذكور في (10) نحصل على الصيغة الجديدة للمسألة

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -5x - 4y \end{aligned} \qquad \begin{cases} x(0) = 3, \\ y(0) = -5. \end{cases}$$

والجدول التالي يعطي نماذج من نتائج الحسابات العددية. ونلاحظ أن قيم $\{y_k\}$ غير معطاة بالجدول حيث أنها غير مطلوبة. وبدلا من ذلك فإن الجدول يعرض قيم الحل المضبوط $\{x(t_k)\}$ للمقارنة.

k	t_k	x_k	$x(t_k)$
0	0.0	3.00000000	3.00000000
1	0.1	2.52564583	2.52565822
2	0.2	2.10402783	2.10404686
3	0.3	1.73506269	1.73508427
4	0.4	1.41653369	1.41655509
5	0.5	1.14488509	1.14490455
10	1.0	0.33324302	0.33324661
20	2.0	-0.00620684	-0.00621162
30	3.0	-0.00701079	-0.00701204
40	4.0	-0.00091163	-0.00091170

48	4.8	-0.00004972	-0.00004969
49	4.9	-0.00002348	-0.00002345
50	5.0	-0.00000493	-0.00000490

حل المعادلة التفاضلية $x''(t)+4x'(t)+5x(t)=0$

مع الشرطين الابتدائيين $x(0)=3,\ x'(0)=-5$

بطريقة رونج – كوتا

* * *

في كل من المثالين السابقين أعدنا صياغة المعادلة التفاضلية المعطاة من الرتبة الثانية لنحصل على نظام مكافئ مكون من معادلتين تفاضليتين آنيتين (simultaneous) من الرتبة الأولى ، ثم قمنا بحل هذا النظام المكافئ بطريقة R-K. وبالكيفية نفسها يمكننا إعادة صياغة أي معادلة تفاضلية من الرتبة m (حيث $m > 1$) لنحصل على نظام مكافئ مكون من عدة معادلات تفاضلية آنية من الرتبة الأولى (عددها m). فمثلا إذا أعطينا المعادلة التفاضلية

$$\frac{d^m x}{dt^m} \equiv x^{(m)} = f\left(t, x, x', x'', \ldots, x^{(m-1)}\right),$$

والشروط الابتدائية

$$x(t_0)=x_0,\quad x'(t_0)=x_0',\ \ldots,\ x^{(m-1)}(t_0)=x_0^{(m-1)}$$

حيث القيم $x_0, x_0', \ldots, x_0^{(m-1)}$ معطاة ، فإننا نعرِّف المتغيرات التابعة الجديدة (new dependent variables)

$$x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t)$$

حيث

$$x_1 = x,\quad x_2 = x',\quad x_3 = x'', \ldots, x_m = x^{(m-1)}$$

من الواضح أن الدوال $x_1, x_2, \ldots, x_m$ تحقق النظام

$$
\begin{aligned}
x_1' &= x_2 \\
x_2' &= x_3 \\
&\vdots \quad \vdots \\
x_{m-1}' &= x_m \\
x_m' &= f(t, x_1, x_2, ..., x_m)
\end{aligned}
$$

وكذلك فإن هذه الدوال تحقق الشروط الابتدائية

$$x_1(t_0) = x_0 , \quad x_2(t_0) = x_0', ..., x_m(t_0) = x_0^{(m-1)}.$$

* * *

والآن نأخذ في الاعتبار حل النظام العام (general system) التالي الذي يتكون من عدد n من المعادلات التفاضلية الآنية من الرتبة الأولى في المتغيرات التابعة $y_1 , y_2 , ..., y_n$:

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} \equiv x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\
\frac{dx_2}{dt} \equiv x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} \equiv x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n)
\end{aligned}
$$

مع شروط ابتدائية معطاة عند نقطة مشتركة t_0 (common point) :

$$
\begin{aligned}
x_1(t_0) &= x_{1,0} \\
x_2(t_0) &= x_{2,0} \\
&\vdots \\
x_n(t_0) &= x_{n,0}
\end{aligned}
$$

يمكن حل هذا النظام بتطبيق إحدى خوارزميات حل معادلة تفاضلية واحدة من الرتبة الأولى (مثل خوارزمية أويلر ، أو خوارزمية رونج – كوتا ، ... الخ) على كل من معادلات هذا النظام (والتي عددها n) على التوازي (in parallel) عند كل خطوة (step) ، كما طبقنا مثلا خوارزمية رونج – كوتا

على كل من معادلتي النظام (3) على التوازي في مثال ٧–١ لحل هذا النظام
.

تمرينات رقم ٧

٧-١) نفرض أن لدينا المعادلتين التفاضليتين الآنيتين التاليتين:

$$\frac{dx}{dt} = x + y + t\,, \qquad \frac{dy}{dt} = 2x - t$$

مع الشرطين الابتدائيين:

$$x = 0\,,\ y = 1 \qquad \text{عند} \quad t = 1.$$

باستخدام طريقة أويلر وحجم خطوة $h \equiv \delta t = 0.1$ أوجد كلا من $x\,,\ y$ عند $t = 1.2$.

٧-٢) نفرض أن لدينا المجموعة التالية المكونة من معادلتين تفاضليتين آنيتين ، حيث

$$y \equiv y(x), \quad z \equiv z(x), \quad y' \equiv \frac{dy}{dx}, \quad z' \equiv \frac{dz}{dx}.$$

$$y' + 2z = 0\,, \quad z' + x - y = 0$$

مع الشرطين الحديين (boundary conditions):

$$y(0) = 1\,, \quad z(0) = 0$$

طبق طريقة أويلر لإيجاد قيم y عند قيم x التالية

$$x = 0(0.2)\ 0.6$$

أي عند :

$$x = 0\,,\ 0.2\,,\ 0.4\,,\ 0.6$$

٧-٣) أ) طبق طريقة أويلر باستخدام فترة (interval) : $h \equiv \delta t = 0.2$ للحصول على حل للمجموعة المكونة من المعادلتين الآنيتين:

$$\frac{dx}{dt} = y - t\,, \quad \frac{dy}{dt} = -2x$$

مع الشرطين الابتدائيين: $[y = 1\,,\ x = 0]$ عند $t = 0$.

ب) أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y'' + 2y - 2x = 0\,; \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0$$

عند $x = 0.4$ ، بتطبيق طريقة أويلر واتخاذ حجم الخطوة $h = 0.2$.

٤-٧) نفرض أن لدينا مسألة القيمة الابتدائية

$$y'' + y = x\,; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0\,.$$

استخدم طريقة أويلر وحجم خطوة $h = 0.1$ لتعيين قيم كل من $y\,, y'\,, y''$ عند $x = 0.2$. وأوجد قيم الخطأ المقابلة إذا علم أن الحل المضبوط لهذه المسألة (ivp) هو :

$$y(x) = \cos(x) - \sin x + x$$

* * *

في المسائل التالية من ٥-٧) إلى ٨-٧):

أ) اتخذ $h = 0.05$ ، وطبق طريقة أويلر لإيجاد $\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}$.

ب) اتخذ $h = 0.05$ ، وطبق طريقة رونج - كوتا لإيجاد $\{x_1, y_1\}$.

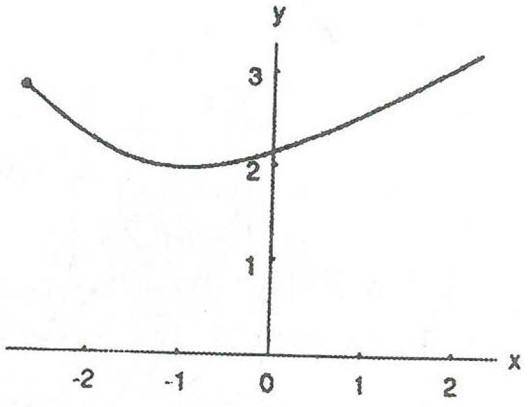
ج) استخدم حاسوبا لتطبيق طريقة رونج - كوتا لحل النظام عبر الفترة المعطاة.

٥-٧) أوجد حل النظام

$$x' = 2x + 3y\,, \quad y' = 2x + y$$

مع الشرط الابتدائي : $y(0) = 2.8\,, \quad x(0) = -2.7$ عبر الفترة $0 \le t \le 1.0$ باستخدام حجم الخطوة $h = 0.05$. ويبي الشكل التالي (شكل ٧-١) المسار المضلعي (polygonal path) الذي تمثله / تكوّنه مجموعة الحل (formed by the solution set) ويمكن مقارنته بالحل المضبوط / التحليلي (analytic solution):

$$x(t) = -\frac{69}{25}e^{-t} + \frac{3}{50}e^{4t}\,, \quad y(t) = \frac{69}{25}e^{-t} + \frac{1}{25}e^{4t}\,.$$



شكل ٧-١

حل النظام $x' = 2x + 3y\,, \quad y' = 2x + y$

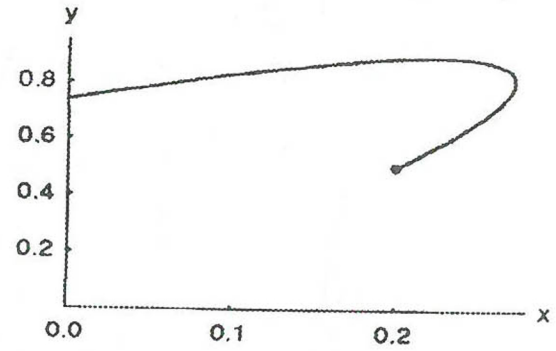
عبر الفترة $[0.0\,,\ 1.0]$

٧-٦) أوجد حل النظام

$$x' = 3x - y\,, \quad y' = 4x - y$$

مع الشرط الابتدائي: $x(0) = 0.2\,, \quad y(0) = 0.5$ عبر الفترة $0 \le t \le 2$ باستخدام حجم الخطوة $h = 0.05$. ويبين الشكل التالي (شكل ٧-٢) المسار الذي تمثله مجموعة الحل ، ويمكن مقارنته بالحل التحليلي:

$$x(t) = \frac{1}{5}e^t - \frac{1}{10}t\,e^t\,, \quad y(t) = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{5}t\,e^t.$$



شكل ٧-٢

حل النظام $x' = 3x - y\,, \quad y' = 4x - y$

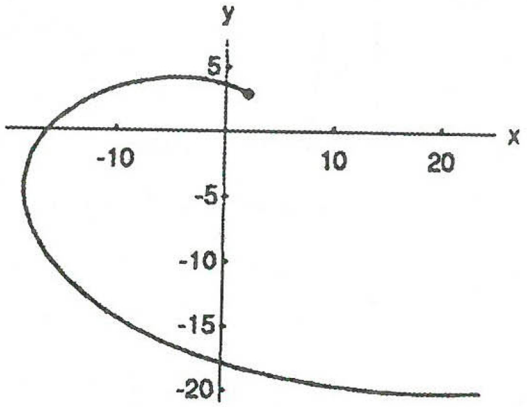
عبر الفترة [0.0 , 2.0]

٧-٧) أوجد حل النظام

$$x' = x - 4y, \quad y' = x + y$$

مع الشرط الابتدائي: $x(0) = 2, \quad y(0) = 3$ عبر الفترة $0 \le t \le 2$ باستخدام حجم الخطوة $h = 0.05$. ويبين الشكل التالي (شكل ٧-٣) المسار الذي تمثله مجموعة الحل، ويمكن مقارنته بالحل التحليلي:

$$x(t) = -2e^t + 4e^t \cos^2(t) - 12e^t \cos(t)\sin(t),$$
$$y(t) = -3e^t + 6e^t \cos^2(t) + 2e^t \cos(t)\sin(t).$$



شكل ٧-٣

حل النظام $x' = x - 4y, \quad y' = x + y$

عبر الفترة [0.0 , 2.0]

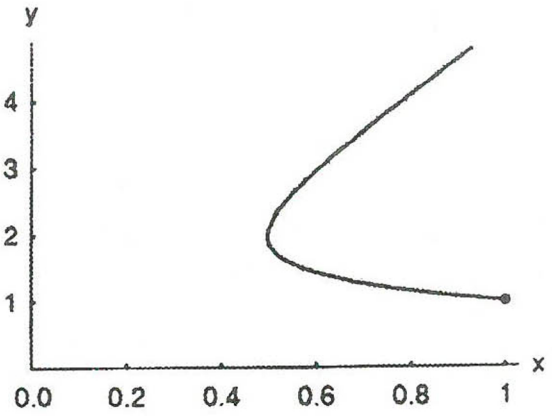
٧-٨) أوجد حل النظام

$$x' = y - 4x, \quad y' = x + y$$

مع الشرط الابتدائي: $x(0) = 1, \quad y(0) = 1$ عبر الفترة $0 \le t \le 1.2$ باستخدام حجم الخطوة $h = 0.05$. ويبين الشكل التالي

(شكل ٧-٤) المسار الذي تمثله مجموعة الحل ، ويمكن مقارنته بالحل التحليلي:

$$x(t)=\frac{3\exp\left(-\sqrt{29}\,t/2\right)-3\exp\left(\sqrt{29}\,t/2\right)}{2\sqrt{29}\exp(3t/2)}+$$
$$+\frac{\exp\left(-\sqrt{29}\,t/2\right)+\exp\left(\sqrt{29}\,t/2\right)}{2\exp(3t/2)},$$
$$y(t)=\frac{-7\exp\left(-\sqrt{29}\,t/2\right)+7\exp\left(\sqrt{29}\,t/2\right)}{2\sqrt{29}\exp(3t/2)}+$$
$$+\frac{\exp\left(-\sqrt{29}\,t/2\right)+\exp\left(\sqrt{29}\,t/2\right)}{2\exp(3t/2)},$$



شكل ٧-٤

حل النظام $x' = y - 4x\,,\quad y' = x + y$

عبر الفترة $[0.0\,,\ 1.2]$

* * *

في المسائل التالية من ٧-٩) إلى ٧-١٢) :

أ) تحقق (verify) من أن الدالة x(t) هي الحل.

ب) أعد صياغة المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية كنظام مكون من معادلتين تفاضليتين من الرتبة الأولى.

ج) اتخذ $h = 0.1$ ، وطبق طريقة أويلر لإيجاد x_1, x_2.

د) اتخذ $h = 0.05$ ، وطبق طريقة رونج – كوتا لإيجاد x_1.

هـ) طبق طريقة رونج – كوتا لحل المعادلة التفاضلية عبرة الفترة $[0,2]$ باستخدام عدد $M = 40$ من الخطوات ، حيث حجم الخطوة $h = 0.05$.

٧-٩)

$$2x''(t) - 5x'(t) - 3x(t) = 45e^{2t}; \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 1.$$

$$x(t) = 4e^{-t/2} + 7e^{3t} - 9e^{2t}$$

٧-١٠)

$$x''(t) + 6x'(t) + 9x(t) = 0; \quad x(0) = 4, \quad x'(0) = -4.$$

$$x(t) = 4e^{-3t} + 8te^{-3t}$$

٧-١١)

$$x''(t) + x(t) = 6\cos(t); \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 3.$$

$$x(t) = 2\cos(t) + 3\sin(t) + 3t\sin(t)$$

٧-١٢)

$$x''(t) + 3x'(t) = 12; \quad x(0) = 5, \quad x'(0) = 1.$$

$$x(t) = 4 + 4t + e^{-3t}$$

٧-١٣) يمكن صياغة نموذج (model) لنظام زنبرك رنيني معين (certain resonant spring system) مع دالة قوة ضاغطة دورية (periodic forcing function) بالنظام:

$$x''(t) + 25x(t) = 8\sin(5t); \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

طبق طريقة رونج – كوتا لحل المعادلة التفاضلية عبر الفترة $[0,2]$ باستخدام عدد $M = 40$ من الخطوات ، حيث حجم الخطوة $h = 0.05$.

٧-١٤) النموذج الرياضي (mathematical model) لدائرة كهربية RLC (electrical circuit) معينة هو:

$$Q''(t)+20\,Q'(t)+125\,Q(t)=9\sin(5t);$$
$$Q(0)=0,\quad Q'(0)=0.$$

طبق طريقة رونج – كوتا لحل المعادلة التفاضلية عبر الفترة [0,2] باستخدام عدد $M = 40$ من الخطوات ، حيث حجم الخطوة $h = 0.05$..

ملاحظة : $I(t)=Q'(t)$ هو التيار الكهربائي عند الزمن t.

٧-١٥) عند الزمن t يعمل البندول (pendulum) زاوية مقدارها $x(t)$ مع المحور الرأسي (vertical axis). وبفرض أنه لا يوجد احتكاك (friction) فإن معادلة الحركة (equation of motion) هي:

$$m\ell x''(t)=-m\,g\sin(x(t))$$

حيث m هي : الكتلة (mass) و ℓ : طول الحبل (lingth of the string). طبق طريقة رونج – كوتا لحل المعادلة التفاضلية عبر الفترة [0,2] باستخدام عدد $M = 40$ من الخطوات ، حيث حجم الخطوة $h = 0.05$ ، علما بأن $g = 32\ ft/sec^2$ ، وكذلك:

(أ) $\ell = 3.2\ ft,\quad x(0)=0.3,\quad x'(0)=0$

(ب) $\ell = 0.8\ ft,\quad x(0)=0.3,\quad x'(0)=0$

٧-١٦) من أمثلة نظم المعادلات التفاضلية غير الخطية (nonlinear DE) مسألة المفترس والفريسة (predator-prey problem). نفرض أن $x(t)$ تمثل تعداد (population) الأرانب (rabbits) عند الزمن t ، و $y(t)$ تمثل تعداد الثعالب (foxes) عند الزمن نفسه. ينص نموذج المفترس والفريسة على أن $x(t)$, $y(t)$ يحققان النظام

$$x'(t)=A\,x(t)-B\,x(t)\,y(t),$$
$$y'(t)=C\,x(t)\,y(t)-D\,y(t).$$

وقد تستـــخدم إحـــدى محاولات المحاكاة النموذجية بالحاسوب (a typical computer simulation) المعاملات (coefficients):

$$A = 2\,, \quad B = 0.02\,, \quad C = 0.0002\,, \quad D = 0.8$$

طـــبق طـــريقة رونج – كوتا لحل المعادلتين التفاضليتين عبر الفترة [0,5] باستخدام عدد $M = 50$ من الخطوات ، حيث حجم الخطوة $h = 0.05$ علما بأن:

(أ) عدد الأرانب عند الزمن $t = 0$ هو : $x(0) = 3000$

وعدد الثعالب عند الزمن $t = 0$ هو : $y(0) = 120$

(ب) عدد الأرانب عند الزمن $t = 0$ هو : $x(0) = 5000$

وعدد الثعالب عند الزمن $t = 0$ هو : $y(0) = 100$

* * *

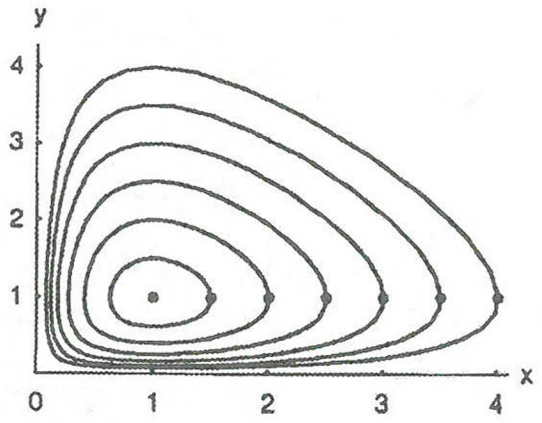
فـــي المسائل التالية من ٧–١٧) إلى ٧–٢٢) استخدم حاسوبا لتطبيق طـــريقة رونـــج – كوتا لحل النظام مع الشرط الابتدائي المعطى عبر الفترة المشار إليها.

٧–١٧) أوجد حل النظام

$$x' = x - xy\,, \quad y' = -y + xy$$

مع الشرط الابتدائي : $x(0) = 4\,, y(0) = 1$

عـــبر الفترة [0,8] ، متخذا حجم الخطوة $h = 0.1$. وتكوّن مسارات (/إزاحـــات) (trajectories) هـــذا النظام مسارات مغلقة (closed paths). والمسار المضلعي (polygonal path) الذي تمثله مجموعة الحل هو أحد المنحنيات المبيَّنة في الشكل التالي (شكل ٧–٥).



شكل ٧-٥

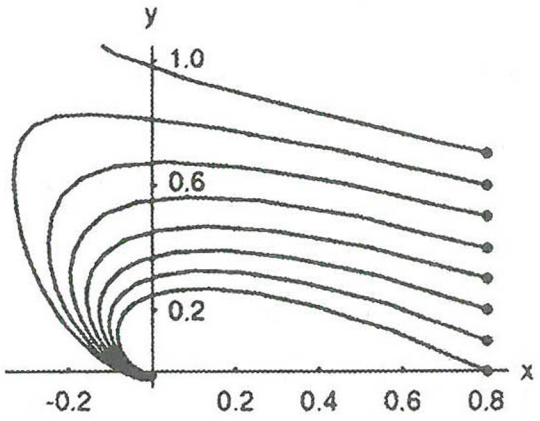
حلول للنظام $x' = x - xy\ ,\ y' = -y + xy$

٧-١٨) أوجد حل النظام

$$x' = -3x - 2y - 2xy^2\ ,\ y' = 2x - y + 2y^3$$

مع الشرط الابتدائي : $x(0) = 0.8\ ,\ y(0) = 0.6$

عـبر الفترة [0,4] ، متخذا حجم الخطوة $h = 0.1$. ويلاحظ أن نقطة الأصـل (origin) تُصـنَّف (classified) / تُعد بالنسبة لهذا النظام "نقطة حلزونية" (spiral point) مستقرة تقاربيا (asymptotically stable). والمسار الذي تمثله مجموعة الحل هو أحد المنحنيات المبينة في الشكل التالي (شكل ٧-٦).



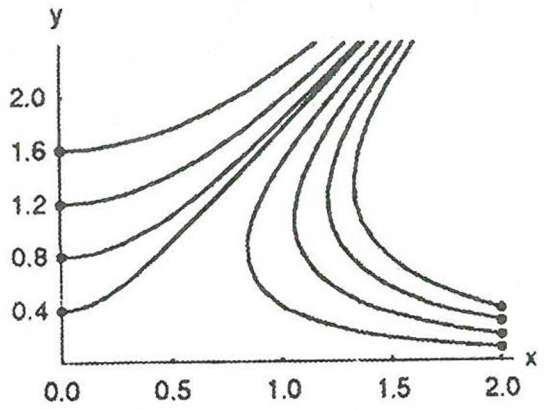
شكل ٧-٦

حلول للنظام $x' = -3x - 2y - 2xy^2\ ,\ y' = 2x - y + 2y^3$

٧-١٩) أوجد حل النظام

$$x' = y^2 - x^2\ ,\ y' = 2xy$$

مع الشرط الابتدائي : $x(0) = 2.0\ ,\ y(0) = 0.1$ عبر الفترة $[0.0\ ,\ 1.5]$ ، متخذا حجم الخطوة $h = 0.05$. ويلاحظ أنه بالنسبة لهذا النظام الخطي (linear system) توجد نقطة سَرجية غير مستقرة (unstable saddle point) عند نقطة الأصل. والمسار الذي تمثله مجموعة الحل هو أحد المنحنيات المبينة في الشكل التالي (شكل ٧-٧).



شكل ٧-٧

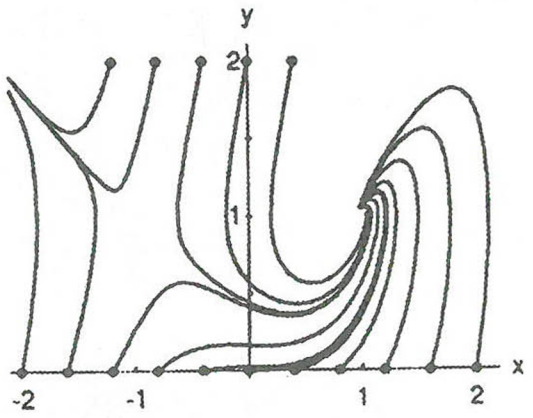
حلول للنظام $x' = y^2 - x^2\ ,\ y' = 2xy$

٧-٢٠) أوجد حل النظام

$$x' = 1 - y\ ,\quad y' = x^2 - y^2$$

مع الشرط الابتدائي $x(0) = -1.2\ ,\ y(0) = 0.0$ عبر الفترة $[0,5]$ ، متخذا حجم الخطوة $h = 0.1$. ويلاحظ أن النقطة (1,1) هي نقطة حلزونية مستقرة تقاربيا ، والنقطة (-1,1) نقطة سرجية غير مستقرة.

والمسار الذي تمثله مجموعة الحل هو أحد المنحنيات المبينة في الشكل التالي (شكل ٧-٨).



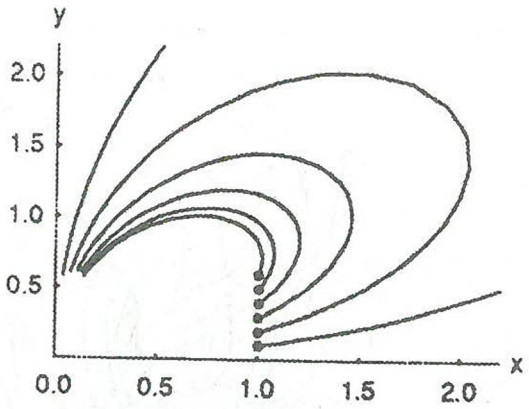
شكل ٧-٨

حلول للنظام $x' = 1 - y, \quad y' = x^2 - y^2$

٧-٢١) أوجد حل النظام

$$x' = x^3 - 2xy^2, \quad y' = 2x^2y - y^3$$

مع الشرط الابتدائي: $x(0) = 1.0 , y(0) = 2.0$ عبر الفترة $[0,2]$ ، متخذا حجم الخطوة $h = 0.025$. يلاحظ أن لهذا النظام الخطي نقطة حرجة (critical) غير مستقرة عند نقطة الأصل. والمسار الذي تمثله مجموعة الحل هو أحد المنحنيات المبينة في الشكل التالي (شكل ٧-٩).



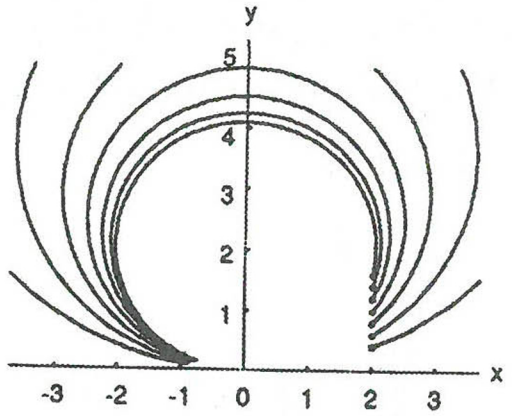
شكل ٧-٩

حلول للنظام $x' = x^3 - 2xy^2 , \quad y' = 2x^2y - y^3$

٧-٢٢) أوجد حل النظام

$$x' = x^2 - y^2 , \quad y' = 2xy$$

مع الشرط الابتدائي: $x(0) = 2.0 , \ y(0) = 0.6$ عبر الفترة $[0.0, 1.6]$ ، متخذا حجم الخطوة $h = 0.02$. ويلاحظ أن نقطة الأصل هي نقطة حرجة غير مستقرة. والمسار الذي تمثله مجموعة الحل هو أحد المنحنيات المبينة في الشكل التالي (شكل ٧-١٠).



شكل ٧-١٠

حلول للنظام $x' = x^2 - y^2 , \quad y' = 2xy$

الفصل الثامن

مسائل القيمة الحدية
Boundary Value Problems

يطلق اسم " مسألة القيمة الحدية " bvp (boundary value problem) على المعادلة التفاضلية التي صيغتها العامة

$$x'' = f(t, x, x'); \quad a \le t \le b \qquad (1)$$

مع الشرطين الحديين:

$$x(a) = \alpha, \quad x(b) = \beta \qquad (2)$$

ويجب التحقق أولا من الشروط التي تضمن وجود حل للمعادلة (1) قبل تطبيق أي طريقة عددية للحل ، وإلا فإننا قد نحصل على قائمة مخرجات لا معنى لها. والنظرية التالية تنص على هذه الشروط العامة.

نظرية ٨-١ (مسألة القيمة الحدية)

نفرض أن f(t,x,y) دالة متصلة على الفترة

$$R = \{(t, x, y):\ a \le t \le b,\ -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty\}$$

ونفرض كذلك أن $\frac{\partial f}{\partial x} \equiv f_x(t, x, y), \frac{\partial f}{\partial y} \equiv f_y(t, x, y)$ دالتان متصلتان على المنطقة R.

إذا وُجد ثابت $M > 0$ بحيث أن f_x , f_y تحققان العلاقتين:

$$f_x(t, x, y) > 0 \quad \forall (t, x, y) \in R \qquad (3)$$

$$\left| f_y(t, x, y) \right| \le M \quad \forall (t, x, y) \in R \qquad (4)$$

فإن مسألة القيمة الحدية bvp :

$$x'' = f(t, x, x'); \quad x(a) = \alpha, \quad x(b) = \beta \qquad (5)$$

لها حل وحيد (unique solution) x = x(t) في الفترة $a \le t \le b$.

ملاحظة:

استخدمنا الاصطلاح $y \equiv x'(t)$ ليرمز إلى المتغير الثالث من متغيرات الدالة $f(t, x, x')$.

والنتيجة التالية تشير إلى حالة خاصة هامة وهي المعادلات التفاضلية الخطية (linear D.E.s):

نتيجة ٨-١ (مسائل القيمة الحدية الخطية)

نفرض أن صيغة الدالة f في نظرية ٨-١ هي:

$$f(t, x, y) = p(t)\, y + q(t)\, x + r(t)$$

وأن كلا من f ومشتقتيها الجزئيتين $\frac{\partial f}{\partial y} \equiv p(t)$, $\frac{\partial f}{\partial x} \equiv q(t)$ دالة متصلة على المنطقة R.

إذا وُجد ثابت $M > 0$ بحيث أن $p(t)$, $q(t)$ يحققان

$$q(t) > 0 \quad \forall\, t \in [a, b] \qquad (6)$$

$$|p(t)| \le M = \max_{a \le t \le b} \{p(t)\} \qquad (7)$$

فإن مسألة القيمة الحدية الخطية

$$x'' = p(t)\, x'(t) + q(t)\, x(t) + r(t); \quad x(a) = \alpha, \quad x(b) = \beta \qquad (8)$$

يكون لها حل وحيد (unique solution): $x = x(t)$ على الفترة $a \le t \le b$.

الاختزال إلى مسألتي قيمة ابتدائية

(Reduction to two IVP's)

طريقة الإطلاق الخطي (Linear Shooting Method)

يمكن تيسير إيجاد حل لمسألة القيمة الحدية الخطية (linear bvp) بالاستعانة بالبنية الخطية (linear structure) للمعادلة ، واستخدام مسألتين خاصتين من مسائل القيمة الابتدائية ivp ، كما هو موضح فيما يلي:

نفرض أن u هي الحل الوحيد لمسألة القيمة الابتدائية ivp :

$$u'' = p(t)u'(t) + q(t)u(t) + r(t); \quad u(a) = \alpha, u'(a) = 0 \qquad (9)$$

وكذلك نفرض أن v هي الحل الوحيد لمسألة القيمة الابتدائية ivp :

$$v'' = p(t)v'(t) + q(t)v(t); \quad v(a) = 0, v'(a) = 1 \qquad (10)$$

وبالتالي يكون التوافق الخطي (linear combination)

$$x(t) = u(t) + C\,v(t) \qquad (11)$$

حلا للمعادلة

$$x'' = p(t)x'(t) + q(t)x(t) + r(t)$$

ويمكن استنتاج ذلك من الخطوات التالية:

$$\begin{aligned} x'' = u'' + Cv'' &= p(t)u'(t) + q(t)u(t) + r(t) + p(t)Cv'(t) + q(t)Cv(t) \\ &= p(t)(u'(t) + Cv'(t)) + q(t)(u(t) + Cv(t)) + r(t) \\ &= p(t)x'(t) + q(t)x(t) + r(t). \end{aligned}$$

ومن العلاقة (11) نرى أن الحل x يأخذ القيمتين الحديتين (boundary values)

$$\begin{aligned} x(a) &= u(a) + Cv(a) = \alpha + 0 = \alpha, \\ x(b) &= u(b) + Cv(b). \end{aligned} \qquad (12)$$

وبتعويض الشرط الحدي (boundary condition) $x(b) = \beta$ في (12) فإننا نحصل على العلاقة

$$C = [\beta - u(b)]/v(b).$$

فإن كانت $v(b) \neq 0$ ، فإن الحل الوحيد لمسألة القيمة الحدية الخطية (8) يصبح

$$x(t) = u(t) + \frac{\beta - u(b)}{v(b)}\,v(t). \qquad (13)$$

ملاحظة:

إذا حققت q فروض النتيجة ٨-١ فإن ذلك يستبعد الحل المثير للمشاكل $v(t) \equiv 0$ (troublesome solution) ، بحيث تصبح (13) هي صيغة الحل المطلوب. وسنترك للقارئ الكريم بحث التفاصيل في المسألة ٨-٩).

مثال ٨-١:

أوجد حل مسألة القيمة الحدية

$$x''(t) = \frac{2t}{1+t^2}\, x'(t) - \frac{2}{1+t^2}\, x(t) + 1;$$
$$x(0) = 1.25, \quad x(4) = -0.95$$

وذلك عبر الفترة [4 , 0].

الحل :

الدوال p , q , r هي:

$$p(t) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad q(t) = \frac{-2}{1+t^2}, \quad r(t) = 1$$

وباستخدام طريقة رونج – كوتا من الرتبة الرابعة وحجم خطوة $h = 0.2$ نحصل على حلول عددية $\{u_j\}$, $\{v_j\}$ للمعادلتين (10) , (9) على الترتيب. والجدول التالي يعطي (في العمود الأول على اليسار) التقريبات $\{u_j\}$ لـ $u(t)$. ثم نستخدم القيمتين

$$u(4) \approx u_{20} = -2.893535$$
$$v(4) \approx u_{20} = 4$$

مع العلاقة (13) لنحصل على

$$w_j = \frac{b - u(4)}{v(4)}\, v_j = 0.485884\, v_j$$

ومن ثم يكون الحل التقريبي المطلوب هو $\{x_j\} = \{u_j + w_j\}$. والجدول التالي يعطي نماذج لهذه القيم ، كما أن الشكل التالي (شكل ٨-١) يعطي المنحنيات المقابلة.

t_j	u_j	w_j	$x_j = u_j + w_j$

0.0	1.250000	0.000000	1.250000
0.2	1.220131	0.097177	1.317308
0.4	1.132073	0.194353	1.326426
0.6	0.990122	0.291530	1.281652
0.8	0.800569	0.388707	1.189276
1.0	0.570844	0.485884	1.056728
1.2	0.308850	0.583061	0.891911
1.4	0.022522	0.680237	0.702759
1.6	-0.280424	0.777413	0.496989
1.8	-0.592609	0.874591	0.281982
2.0	-0.907039	0.971767	0.064728
2.2	-1.217121	1.068944	-0.148177
2.4	-1.516639	1.166121	-0.350518
2.6	-1.799740	1.263297	-0.536443
2.8	-2.060904	1.360474	-0.700430
3.0	-2.294916	1.457651	-0.837265
3.2	-2.496842	1.554828	-0.942014
3.4	-2.662004	1.652004	-1.010000
3.6	-2.785960	1.749181	-1.036779
3.8	-2.864481	1.846358	-1.018123
4.0	-2.893535	1.943535	-0.950000

الحلول التقريبية $\{x_j\} = \{u_j + w_j\}$

للمعادلة $x''(t) = \frac{2t}{1+t^2} x'(t) - \frac{2}{1+t^2} x(t) + 1$

شكل ٨-١

التقريبات العددية $u(t)$, $w(t)$ المستخدمة لتكوين $x(t) = u(t) + w(t)$ والتي

هي حل المعادلة $x''(t) = \frac{2t}{1+t^2} x'(t) - \frac{2}{1+t^2} x(t) + 1$

ويمكن للقارئ أن يتحقق من أن $v(t) = t$ هي الحل التحليلي لمسألة القيمة الحدية bvp (10) ، أي أن

$$v''(t) = \frac{2t}{1+t^2} v'(t) - \frac{2}{1+t^2} v(t)$$

مع الشرطين الابتدائيين

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 1$$

والتقريبات المعطاة في الجدول التالي تقارن بين الحلول العددية التي نحصل عليها بطريقة الإطلاق الخطي باستخدام حجمي خطوة $h = 0.2, h = 0.1$ وبين الحل التحليلي:

$$x(t) = 1.25 + 0.4860896526\, t - 2.25\, t^2 + 2t \arctan(t) - \frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right) + \frac{1}{2} t^2 \ln\left(1+t^2\right).$$

t_j	x_j h=0.2	$x(t_j)$ exact	$x(t_j)-x_j$ error	t_j	x_j h=0.1	$x(t_j)$ exact	$x(t_j)-x_j$ Error
0.0	1.250000	1.250000	0.000000	0.0	1.250000	1.250000	0.000000
				0.1	1.291116	1.291117	0.000001
0.2	1.317308	1.317350	0.000042	0.2	1.317348	1.317350	0.000002
				0.3	1.328986	1.328990	0.000004
0.4	1.326426	1.326505	0.000079	0.4	1.326500	1.326505	0.000005
				0.5	1.310508	1.310514	0.000006
0.6	1.281652	1.281762	0.000110	0.6	1.281756	1.281762	0.000006
0.8	1.189276	1.189412	0.000136	0.8	1.189404	1.189412	0.000008
1.0	1.056728	1.056886	0.000158	1.0	1.056876	1.056886	0.000010
1.2	0.891911	0.892086	0.000175	1.2	0.892076	0.892086	0.000010
1.6	0,496989	0.497187	0.000198	1.6	0.497175	0.497187	0.000012
2.0	0.064728	0.064931	0.000203	2.0	0.064919	0.064931	0.000012
2.4	-0.350518	-0.350325	0.000193	2.4	-0.350337	-0.350325	0.000012
2.8	-0.700430	-0.700262	0.000168	2.8	-0.700273	-0.700262	0.000011
3.2	-0.942014	-0.941888	0.000126	3.2	-0.941895	-0.941888	0.000007
3.6	-1.036779	-1.036708	0.000071	3.6	-1.036713	-1.036708	0.000005
4.0	-0.950000	-0.950000	0.000000	4.0	-0.950000	-0.950000	0.000000

$$x''(t)=\frac{2t}{1+t^2}x'(t)-\frac{2}{1+t^2}x(t)+1$$

والشكل التالي (شكل ٨-٢) يعطي منحنى الحل التقريبي عندما h = 0.2 ويشتمل الجدول أيضا على قيم الخطأ. ويلاحظ أنه نظرا لأن الحلول بطريقة رونج – كوتا تحتوي على خطأ من الرتبة $O(h^4)$ فإن قيمة الخطأ في الحل باستخدام حجم الخطوة h = 0.1 يساوي تقريبا $\frac{1}{16}$ من قيمة الخطأ في الحل باستخدام حجم الخطوة h = 0.2.

شكل ٨-٢

منحنى التقريب العددي للمعادلة $x''(t)=\frac{2t}{1+t^2}x'(t)-\frac{2}{1+t^2}x(t)+1$

(باستخدام h = 0.2)

خوارزمية طريقة الإطلاق الخطي

(Linear Shooting method)

لتقريب حل مسألة القيمة الحدية bvp :

$$x''=p(t)x'(t)+q(t)x(t)+r(t);$$
$$x(a)=\alpha,\quad x(b)=\beta$$

عبر الفترة [a , b] باستخدام طريقة رونج – كوتا من الرتبة الرابعة.

```
INPUT A, B                                  {Endpoints of interval}
INPUT Alpha, Beta                           {boundary values}
INPUT M                                     {Number of steps}

Fl (t,x,y) := P(t) y + Q(t) x + R(t)
F2(t,x,y) := P(t) y + Q(t) x

Subroutine RKbdd4(F,A,B,Alpha,Beta,T,X,M)   {Runge Kutta order 4
   H := (B-A)/M                              subroutine}
   T(0) :=A
   X(0) := Alpha
```

```
Y(0) := Beta
  FOR J=0  TO M-1 DO
  |       Tj := T(J)
  |       xj := X(J)
  |       Yj := Y(J)
  |       Kl := H*Yj
  |       R1 := H*F(Tj,Xj,Yj)
  |       K2 := H*(Yj + Rl/2)
  |       R2 := H*F(Tj+H/2,Xj+K1/2,Yj+Rl/2)
  |       K3 := H*(Yj + R2/2)
  |       R3 := H*F(Tj+H/2,Xj+K2/2,Yj+R2/2)
  |       K4 := H*(Yj + R3 )
  |       R4 := H*F(Tj+ H, Xj+ K3, Yj+ R3)
  |       X(J+l) := Xj + (Kl + 2 K2 + 2 K3 + K4)/6
  |       Y(J+l) := Yj + (Rl + 2 R2 + 2 R3 + R4)/6
  └──     T(J+l) := A + H*(J+l)

  {The main program starts here.}
  CALL RKbdd4(Fl,A,B,Alpha,0,T,X1,M);
  CALL RKbdd4(F2,A,B,0,1,T,X2,M);

  FOR J = 0 TO M DO
  └──   X(J) := Xl(J) + (Beta-Xl(M))*X2(J)/X2(M)

  OUTPUT {T(J),X(J): J = 0,…,M}.
```

تمرينات رقم ٨

في المسائل التالية من ٨-١) إلى ٨-٩)

أ) استخدم طريقة الإطلاق الخطي لحل مسألة القيمة الحدية المعطاة بأخذ حجم الخطوة $h = 0.2$ (وكذلك $h = 0.05 , h = 0.1$).

ب) اثبت أن $f(t)$ هي الحل العام (general solution) للمعادلة التفاضلية (بدون الشروط الحدية) (without boundary conditions).

ج) قارن الحلول التي حصلت عليها في الجزء أ) مع الحل الخاص $g(t)$ (particular solution).

٨-١) أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$x'' = (-2/t)\,x'(t) + \left(2/t^2\right)x(t) + [10\cos(\ln(t))]/t^2$$

عبر الفترة $[1 , 3]$ ، حيث $x(1) = 1 , x(3) = -1$

$$f(t) = \frac{-3t^2\cos(\ln(t)) + t^2\sin(\ln(t)) + C_2t^3 + C_1}{t^2}$$

$$g(t) = \frac{4.33590689 - 0.3359506908t^3 - 3t^2\cos(\ln(t)) + t^2\sin(\ln(t))}{t^2}$$

٨-٢) أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$x'' = -5x'(t) - 6x(t) + te^{-2t} + 3.9\cos(3t)$$

عبر الفترة $[0 , 3]$ ، حيث $x(0) = 0.95 , x(3) = 0.15$.

$$f(t) = C_1 e^{-3t} + e^{-2t} + C_2 e^{-2t} - te^{-2t} + \frac{1}{2}t^2 e^{-2t}$$
$$+\frac{3}{20}\cos(t) - \frac{1}{5}\cos^3(t) - \frac{1}{4}\sin(t) + \cos^2(t)\sin(t)$$
$$g(t) = 2.030708977e^{-3t} - 1.030708977e^{-2t} - te^{-2t} + \frac{1}{2}t^2 e^{-2t}$$
$$+\frac{3}{20}\cos(t) - \frac{1}{5}\cos^3(t) - \frac{1}{4}\sin(t) + \cos^2(t)\sin(t)$$

٨-٣) أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$x'' = -2x'(t) - 2x(t) + e^{-t} + \sin(2t)$$

عبر الفترة [0 , 4] ، حيث x(0) = 0.6 , x(4) = -0.1 .

$$f(t) = \frac{1}{5} + e^{-t} + C_1 e^{-t}\cos(t) - \frac{2}{5}\cos^2(t) + C_2 e^{-t}\sin(t)$$
$$-\frac{1}{5}\cos(t)\sin(t)$$
$$g(t) = \frac{1}{5} + e^{-t} - \frac{1}{5}e^{-t}\cos(t) - \frac{2}{5}\cos^2(t) +$$
$$+ 3.670227413e^{-t}\sin(t) - \frac{1}{5}\cos(t)\sin(t)$$

٨-٤) أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$x'' = -4x'(t) - 4x(t) + 5\cos(4t) + \sin(2t)$$

عبر الفترة [0 , 2] ، حيث x(0) = 0.75 , x(2) = 0.25 .

$$f(t) = -\frac{1}{40} + C_2 e^{-2t} + C_1 te^{-2t} + \frac{19}{20}\cos^2(t) - \frac{6}{5}\cos^4(t)$$
$$-\frac{4}{5}\cos(t)\sin(t) + \frac{8}{5}\cos^3(t)\sin(t)$$
$$g(t) = -\frac{1}{40} + 1.025e^{-2t} - 1.915729975te^{-2t} + \frac{19}{20}\cos^2(t)$$
$$-\frac{6}{5}\cos^4(t) - \frac{4}{5}\cos(t)\sin(t) + \frac{8}{5}\cos^3(t)\sin(t)$$

٨-٥) أوجد المعادلة التفاضلية

$$x'' + (1/t)x' + \left[1 - 1/\left(4t^2\right)\right]x = 0$$

عبر الفترة [1 , 6] ، حيث $x(1) = 1 , x(6) = 0$.

$$f(t) = \frac{C_1 \cos(t) - C_2 \sin(t)}{\sqrt{t}},$$

$$g(t) = \frac{0.2913843206 \cos(t) + 1.001299385 \sin(t)}{\sqrt{t}}$$

٨-٦) أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$x'' + (2/t)x' - \left(2/t^2\right)x = \frac{\sin(t)}{t^2}$$

عبر الفترة [1 , 6] ، حيث $x(1) = -0.02 , x(6) = 0.02$.

$$f(t) = \frac{-t^2 \sin(t) + t^3 Ci(t) - Sin(t) + t\, Cos(t) + C_2 t^3 + C_1}{3t^2},$$

$$g(t) = \frac{-t^2 \sin(t) + t^3 Ci(t) - Sin(t) + t\, Cos(t) + 0.0000731808 t^3 + 0.7451625603}{3t^2}$$

٨-٧) أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$x'' + (1/t)x' + \left[1 - 1/\left(4t^2\right)\right]x = \sqrt{t}\cos(t)$$

عبر الفترة [1 , 6] ، حيث $x(1) = 1.0 , x(6) = -0.5$

$$f(t) = \frac{t\cos(t) + t^2 \sin(t) - 4C_2 \sin(t) + 4C_1 \cos(t)}{4\sqrt{t}}$$

$$g(t) = \frac{t\cos(t) + t^2 \sin(t) + 2.960284381 \sin(t) + 0.2354853843 \cos(t)}{4\sqrt{t}}$$

٨-٨) أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$x'' + (1/t)x' + \left(1/t^2\right)x = 1$$

عبر الفترة [0.5 , 4.5] ، حيث $x(0.5) = 1 , x(4.5) = 2$.

$$f(t) = t^2 + C_2 t + C_1 t \ln(t),$$

$$g(t) = t^2 - 0.2525826491\, t - 2.528442297 t \ln(t)$$

٨-٩) نفرض أن q تحقق فروض النتيجة ٨-١. اثبت أن $v(t) \equiv 0$ هي الحل الوحيد (unique solution) لمسألة القيمة الحدية

$$v'' = p(t)v'(t) + q(t)v(t); \quad v(a) = 0, \quad v(b) = 0.$$

٨-١٠) هل تحقق مسألة القيمة الحدية المعطاة في السؤال ٨-٨) فروض نتيجة ٨-١) ؟ ولماذا ؟

٨-١١) اكتب خوارزمية شبيهة بخوارزمية طريقة الإطلاق الخطي المعطاة بنهاية الفصل ، ولكن بحيث تستخدم طريقة هوين بدلا من طريقة رونج – كوتا من الرتبة الرابعة.

٨-١٢) نرض أن لدينا المسألة التالية:

$$x'' + x = 0; \quad t \in [0, 2\pi], \quad x(0) = 1, \quad x(2\pi) = 2$$

ناقش أسباب عدم إمكانية وجود حل لهذه المسألة.

٨-١٣) استنتج " طريقة إطلاق " (a shooting method) لحل مسألة القيمة الحدية غير الخطية (nonlinear bvp)

$$x'' = f(t, x, x'); \quad t \in [a, b], \quad x(a) = \alpha, \quad x(b) = \beta$$

٨-١٤) استخدم الطريقة التي توصلت إليها في السؤال السابق ٨-١٣) وذلك لحل المسائل التالية:

أ) $$x(t)x''(t) + [x'(t)]^2 + 1 = 0$$

عبر الفترة [0 , 3] ، حيث x(3) = 0.0 , x(0) = 1.8 .

استخدم حجم الخطوة h = 0.1.

ب) $$x''(t) = x'(t)\ x(t)$$

عبر الفترة [0 , 2] ، حيث x(2) = 5.5 , x(0) = -4.4 .

استخدم حجم الخطوة h = 0.1.

ج) $x''(t) = 3\sqrt{1 + [x'(t)]^2}$

عبر الفترة [0 , 2] ، حيث $x(2) = 3 , x(0) = 3$.

استخدم حجم الخطوة $h = 0.1$.

الفصل التاسع

طريقة الفرق المحدود
Finite Difference Method

يمكن حل أنواع معينة من مسائل القيمة الحدية من الرتبة الثانية (second order bvp's) باستخدام الطرق التي تشتمل على تقريب المشتقات بفروق مقسومة (difference quotient approximations for derivatives).

نفرض أن لدينا المعادلة الخطية

$$x'' = p(t)x'(t) + q(t)x(t) + r(t); t \in [a,b], x(a) = \alpha, x(b) = \beta \quad (1)$$

كوِّن تجزيئا (partition) للفترة [a , b] باستخدام النقاط

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b.$$

حيث

$$h = (b - a)/n; \quad t_j = a + h_j, \quad j = 0,1,2,\ldots,N$$

وسنقوم بتقريب المشتقات باستخدام صيغ الفروق المركزية (central-difference formulas)

$$x'(t_j) = \frac{x(t_{j+1}) - x(t_{j-1})}{2h} + O(h^2) \quad (2)$$

$$x''(t_j) = \frac{x(t_{j+1}) - 2x(t_j) + x(t_{j-1})}{h^2} + O(h^2). \quad (3)$$

والآن نقوم بتعويض x_j محل كل حد $x(t_j)$ في الطرف الأيمن في كل من (3) , (2) ، ثم نقوم بتعويض المعادلات الناتجة من ذلك في (1) لنحصل على العلاقة:

$$\frac{x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}}{h^2} + O(h^2) = p(t_j)\left(\frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{2h} + O(h^2)\right) + q(t_j)x_j + r(t_j). \quad (4)$$

ثم نقوم بإسقاط الحدين $O\left(h^2\right)$ الموجودين في (4) ، وندخل الاصطلاح

$$p_j = p(t_j), \quad q_j = q(t_j), \quad r_j = r(t_j)$$

وهذا بدوره يؤدي إلى معادلة الفروق (difference equation)

$$\frac{x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}}{h^2} = p_j \frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{2h} + q_j x_j + r_j .$$

والتي نستخدمها لحساب التقريبات العددية لحلول المعادلة التفاضلية (1) ، وذلك بضرب طرفي العلاقة (5) في h^2 ، ثم تجميع الحدود التي تشتمل على x_{j-1} , x_j , x_{j+1} وترتيبها في نظام معادلات خطية (system of linear equations):

$$\left(\frac{-h}{2} p_j - 1\right) x_{j-1} + \left(2 + h^2 q_j\right) x_j + \left(\frac{h}{2} p_j - 1\right) x_{j+1} = -h^2 r_j , \quad (6)$$

حيث $j = 1,2,...,N-1$ ، $x_0 = \alpha$, $x_N = \beta$.

النظام الذي تمثله العلاقة (6) يتميز بالصيغة القطرية الثلاثية (tridiagonal form) المعتادة ، والتي تتضح صورتها أكثر حين تُعرض في الصورة المصفوفية:

$$\begin{bmatrix} 2+h^2 q_1 & \frac{h}{2}p_1 - 1 & & & \\ \frac{-h}{2}p_2 - 1 & 2+h^2 q_2 & \frac{h}{2}p_2 - 1 & & O \\ & \frac{-h}{2}p_j - 1 & 2+h^2 q_j & \frac{h}{2}p_j - 1 & \\ O & & \frac{-h}{2}p_{N-2} - 1 & 2+h^2 q_{N-2} & \frac{h}{2}p_{N-2} - 1 \\ & & & \frac{-h}{2}p_{N-1} - 1 & 2+h^2 q_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_j \\ x_{N-2} \\ x_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -h^2 r_1 + e_0 \\ -h^2 r_2 \\ -h^2 r_j \\ -h^2 r_{N-2} \\ -h^2 r_{N-1} + e_N \end{bmatrix}$$

حيث

$$e_0 = \left(\frac{h}{2} p_1 + 1\right)\alpha, \quad e_N = \left(\frac{-h}{2} p_{N-1} + 1\right)\beta.$$

وعندما نجري الحسابات باستخدام حجم خطوة يساوي h ، فإن التقريب العددي للحل يكون عبارة عن مجموعة من النقاط المنفصلة $\{(t_j, x_j)\}$ (discrete points). وإذا كان الحل التحليلي $x(t_j)$ معلوما فيمكننا مقارنة الحلين: العددي x_j والمضبوط $x(t_j)$ كما يتضح من المثال التالي.

مثال ٩-١:

أوجد حل مسألة القيمة الحدية

$$x''(t) = \frac{2t}{1+t^2} x'(t) - \frac{2}{1+t^2} x(t) + 1$$

عبر الفترة [0 , 4] ، حيث $x(0) = 1.25 , x(4) = -0.95$.

الحل :

الدوال p , q , r هي:

$$p(t) = 2t/(1+t^2), \quad q(t) = -2/(1+t^2), \quad r(t) = 1.$$

وتطبق طريقة الفرق المحدود لإيجاد الحلول العددية (x_j) باستخدام نظام المعادلات (6). والجدول التالي يبين نماذج لقيم التقريبات

$$x_{j,1}, \qquad x_{j,2}, \qquad x_{j,3}, \qquad x_{j_4}$$

المقابلة لأحجام خطوة:

$$h_1 = 0.2, \quad h_2 = 0.1, \quad h_3 = 0.05, \quad h_4 = 0.025$$

على الترتيب.

t_j	$x_{j,1}$ $h_1 = 0.2$	$x_{j,2}$ $h_2 = 0.1$	$x_{j,3}$ $h_3 = 0.05$	$x_{j,4}$ $h_4 = 0.025$	$x(t_j)$ Exact
0.0	1.250000	1.250000	1.250000	1.250000	1.250000
0.2	1.314503	1.316646	1.317174	1.317306	1.317350
0.4	1.320607	1.325045	1.326141	1.326414	1.326505
0.6	1.272755	1.279533	1.281206	1.281623	1.281762
0.8	1.177399	1.186438	1.188670	1.189227	1.189412
1.0	1.042106	1.053226	1.055973	1.056658	1.056886
1.2	0.874878	0.887823	0.891023	0.891821	0.892086
1.4	0.683712	0.698181	0.701758	0.702650	0.702947
1.6	0.476372	0.492027	0.495900	0.496865	0.497187
1.8	0.260264	0.276749	0.280828	0.281846	0.282184
2.0	0.042399	0.059343	0.063537	0.064583	0.064931
2.2	-0.170616	-0.153592	-0.149378	-0.148327	-0.147977
2.4	-0.372557	-0.355841	-0.351702	-0.350669	-0.350325
2.6	-0.557565	-0.541546	-0.537580	-0.536590	-0.536261
2.8	-0.720114	-0.705188	-0.701492	-0.700570	-0.700262
3.0	-0.854988	-0.841551	-0.838223	-0.837393	-0.837116
3.2	-0.957250	-0.945700	-0.942839	-0.942125	-0.941888
3.4	-1.022221	-1.012958	-1.010662	-1.010090	-1.009899
3.6	-1.045457	-1.038880	-1.037250	-1.036844	-1.036709
3.8	-1.022727	-1.019238	-1.018373	-1.018158	-1.018086
4.0	-0.950000	-0.950000	-0.950000	-0.950000	-0.950000

التقريبات العددية لحلول المعادلة $x''(t) = \frac{2t}{1+t^2} x'(t) - \frac{2}{1+t^2} x(t) + 1$

والشكل التالي (شكل ٩-١) يوضح منحنى المسار المضلعي (polygonal path) الذي تكوّنه متتابعة النقاط $\{(t_j, x_{j,1})\}$ في الحالة $h_1 = 0.2$.

شكل ٩-١

منحنى التقريب العددي لحل المعادلة $x''(t) = \frac{2t}{1+t^2} x'(t) - \frac{2}{1+t^2} x(t) + 1$

(باستخدام حجم الخطوة h = 0.2)

ويقارن الجدول السابق كذلك بين الحلول العددية التي حصلنا عليها وبين الحل التحليلي:

$$x(t)=1.25+0.4860896526\,t-2.25t^2+$$
$$+2t\arctan(t)-\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)+\frac{1}{2}t^2\ln\left(1+t^2\right)$$

ويمكن إثبات أن الحلول العددية تشتمل على خطأ من الرتبة order $O(h^2)$. وهذا يعني أن تقليل حجم الخطوة إلى نصف قيمته يؤدي إلى تقليل الخطأ إلى نحو ربع قيمته ، والنتائج المبينة بالجدول التالي تتفق مع هذه النتيجة ، فمثلا عندما $t_j = 1.0$ تكون الأخطاء المقابلة لأحجام الخطوة

$$h_1=0.2,\qquad h_2=0.1,\qquad h_3=0.05,\qquad h_4=0.025$$

هي على الترتيب :

$$e_{j,1}=0.014780,\quad e_{j,2}=0.003660,\quad e_{j,3}=0.000913,\quad e_{j,4}=0.000228$$

وبالتالي نحصل على النسب التالية للأخطاء :

$$e_{j,2}/e_{j,1}=0.2476\approx 0.25,\quad e_{j,3}/e_{j,2}=0.2495\approx 0.25,$$
$$e_{j,4}/e_{j,3}=0.2497\approx 0.25.$$

ونلاحظ كذلك أن هذه النسب تقترب تدريجيا من النسبة $\frac{1}{4}$ كلما نقص حجم الخطوة.

t_j	$x(t_j)-x_{j,1}=e_{j,1}$	$x(t_j)-x_{j,2}=e_{j,2}$	$x(t_j)-x_{j,3}=e_{j,3}$	$x(t_j)-x_{j,4}=e_{j,4}$
	$h_1 = 0.2$	$h_2 = 0.1$	$h_3 = 0.05$	$h_4 = 0.025$
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.2	0.002847	0.000704	0.000176	0.000044
0.4	0.005898	0.001460	0.000364	0.000091
0.6	0.009007	0.002229	0.000556	0.000139
0.8	0.012013	0.002974	0,000742	0.000185

1.0	0.014780	0.003660	0.000913	0.000228
1.2	0.017208	0.004263	0.001063	0.000265
1.4	0.019235	0.004766	0.001189	0.000297
1.6	0.020815	0.005160	0.001287	0.000322
1.8	0.021920	0.005435	0.001356	0.000338
2.0	0.022533	0.005588	0.001394	0.000348
2.2	0.022639	0.005615	0.001401	0.000350
2.4	0.022232	0.005516	0.001377	0.000344
2.6	0.021304	0.005285	0.001319	0.000329
2.8	0.019852	0.004926	0.001230	0.000308
3.0	0.017872	0.004435	0.001107	0.000277
3.2	0.015362	0.003812	0.000951	0.000237
3.4	0.012322	0.003059	0.000763	0.000191
3.6	0.008749	0.002171	0.000541	0.000135
3.8	0.004641	0.001152	0.000287	0.000072
4.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

الأخطاء في التقريبات العددية الناتجة عند تطبيق طريقة الفرق المحدود

وفيما يلي نوضح كيفية تطبيق طريقة ريتشاردسون للتحسين لاستيفاء (extrapolate) قيم المتتابعات

$$\text{sequences}: \quad \{x_{j,1}\}, \quad \{x_{j,2}\}, \quad \{x_{j,3}\}, \quad \{x_{j,4}\}$$

والتي تبدو غير دقيقة ، والحصول على دقة تبلغ ستة أرقام (six digits of precision).

احذف حدي الخطأ (error terms) $O(h^2), O((h/2)^2)$ في التقريبات $\{x_{j,1}\}, \{x_{j,2}\}$ وذلك بتوليد (generating) المتتابعة المستوفاة $\{z_{j,1}\} = \{(4x_{j,2} - x_{j,1})/3\}$ (extrapolated sequence).

وبالمثل يمكننا حذف حدي الخطأ $O\left((h/2)^2\right), O\left((h/4)^2\right)$ في التقريبات $\{x_{j,3}\}, \{x_{j,2}\}$ بتوليد المتتابعة $\{z_{j,2}\} = \{(4x_{j,3} - x_{j,2})/3\}$.

ويمكن إثبات أن المستوى الثاني (second level) من طريقة ريتشاردسون للتحسين ينطبق على المتتابعتين $\{z_{j,2}\}, \{z_{j,1}\}$ ، بحيث يصبح التحسين الثالث: $\{(16z_{j,2} - z_{j,1})/15\}$ (انظر مثلا المرجع [41]).

ولتوضيح الخطوات المذكورة سابقا لهذه الطريقة بمثال ، نفرض أن المطلوب إيجاد القيم المستوفاة (extrapolated values) المقابلة للنقطة $t_j = 1.0$.

القيمة الأولى المستوفاة هي:

$$\frac{4x_{j,2} - x_{j,1}}{3} = \frac{4\times 1.053226 - 1.042106}{3} = 1.056932 = z_{j,1}$$

والقيمة الثانية المستوفاة هي:

$$\frac{4x_{j,3} - x_{j,2}}{3} = \frac{4\times 1.055973 - 1.053226}{3} = 1.056889 = z_{j,2}$$

وأخيرا الاستيفاء الثالث يشتمل على الحدين $z_{j,1}$, $z_{j,2}$:

$$\frac{16z_{j,2} - z_{j,1}}{15} = \frac{16\times 1.056889 - 1.056932}{15} = 1.056886.$$

وهذه القيمة الأخيرة تحتوي على ستة أرقام عشرية دقيقة (six decimal places of accuracy) . والجدول التالي يعطي القيم عند النقاط الأخرى.

t_j	$\frac{4x_{j,2} - x_{j,1}}{3}$ $z_{j,1}$	$\frac{4x_{j,3} - x_{j,2}}{3}$ $z_{j,2}$	$\frac{16z_{j,2} - z_{j,1}}{15}$	$x(t_j)$ Exact solution
0.0	1.250000	1.250000	1.250000	1.250000
0.2	1.317360	1.317351	1.317350	1.317350
0.4	1.326524	1.326506	1.326504	1.326505
0.6	1.281792	1.281764	1.281762	1.281762
0.8	1.189451	1.189414	1.189412	1.189412
1.0	1.056932	1.056889	1.056886	1.056886

1.2	0.892138	0.892090	0.892086	0.892086
1.4	0.703003	0.702951	0.702947	0.702948
1.6	0.497246	0.497191	0.497187	0.497187
1.8	0.282244	0.282188	0.282184	0.282184
2.0	0.064991	0.064935	0.064931	0.064931
2.2	-0.147918	-0.147973	-0.147977	-0.147977
2.4	-0.350268	-0.350322	-0.350325	-0.350325
2.6	-0.536207	-0.536258	-0.536261	-0.536261
2.8	-0.700213	-0.700259	-0.700263	-0.700262
3.0	-0.837072	-0.837113	-0.837116	-0.837116
3.2	-0.941850	-0.941885	-0.941888	-0.941888
3.4	-1.009870	-1.009898	-1.009899	-1.009899
3.6	-1.036688	-1.036707	-1.036708	-1.036708
3.8	-1.018075	-1.018085	-1.018086	-1.018086
4.0	-0.950000	-0.950000	-0.950000	-0.950000

استيفاء التقريبات العددية $\{x_{j,3}\}$,$\{x_{j,2}\}$,$\{x_{j,1}\}$ التي حصلنا عليها بطريقة الفرق المحدود.

خوارزمية طريقة الفرق المحدود

(Finite Difference Method Algorithm)

لإيجاد حل عددي تقريبي لمسألة القيمة الحدية

$$x'' = p(t)x'(t) + q(t)x(t) + r(t);\ x(a) = \alpha,\ x(b) = \beta$$

عبر الفترة $[a\ ,\ b]$ ، وذلك باستخدام صيغة الفروق المحدودة من الرتبة $O(h^2)$.

ملاحظة :

الشبكة (mesh) هي :

$$a = t_1 < \cdots < t_{N+1} = b$$

ونقاط الحل (solution points) هي :

$$\{(t_j, x_j)\}, \quad j = 1,2,\cdots, N+1$$

```
INPUT A, B                                  {Endpoints of interval}
INPUT Alpha, Beta                           {Boundary values}
INPUT N                                     {Number of steps}

Subroutine CoeffMat(A,B,Alpha,Beta,Vt,Va,Vb,Vc,Vd,N)
   H := [B–A]/N
   FOR     J=l TO N–1 DO
   └──Vt(J) := A + H*J
   FOR     J=l TO N–1 DO
   └──Vb(J) := –H^2*R(Vt(J))
   Vb(l) := Vb(1) + [1 + H/2*P(Vt(l))] –Alpha
   Vb(N–1) := Vb(N–1) + [1 – H/2*P(Vt(N–1))]*Beta
   FOR     J=1 TO N–1 DO
   └──Vd(J) := 2 + H^2*Q(Vt(J))
   FOR     J=l TO N–2 DO
   │──Va(J) := – 1 – H*P(Vt(J+l))/2
   FOR J=l TO N–2 DO
   │──Vc(J) := –1 + H*P(Vt(J))/2

Subroutine TriMat(Va,Vb,Vc,Vd,X0,N)
   FOR K=2 TO N–1 DO
   │   Temp := Va(K–l)/Vd(K–1)
   │   Vd(K) := Vd(K) – Temp*Vc(K–1)
   └── Vb(K) := Vb(K) – Temp*Vb(K–1)
       X0(N–1) := Vb(N–l)/Vd(N–1)
   FOR  K = N–2 DOWNTO  1  DO
   └─  X0(K) := (Vb(K) – Vc(K) *X0(K+l))/Vd(K)

{The main program starts here.}
CALL       CoeffMat (A,B,Alpha,Beta,Vt,Va,Vb,Vc,Vd,N)
CALL       TriMatTriMat(Va,Vb,Vc,Vd,X0,N)

FOR i=l TO N–1 DO
│  T(I + 1) : = Vt(i)
└─X(i+l):= X0(i)
T(l) := A, T(N+l) := B
X(l) := Alpha, X(N+l) := Beta
```

OUTPUT {T(J), X(J): for J=1,2,...,N+l}

تمرينات رقم ٩

في المسائل التالية من ٩-١) إلى ٩-٩)

أ) استخدم طريقة الفرق المحدود لحل مسألة القيمة الحدية المعطاة باتخاذ حجم الخطوة :

$$h = 0.2 , \quad h = 0.1 , \quad h = 0.05$$

ب) استخدم طريقة استيفاء القيم التي حصلت عليها في الجزء أ) للحصول على إجابة أدق (أي كوِّن جدولا للتحسينات ، شبيها بجدول استيفاء التقريبات العددية المعطى قرب نهاية الفصل).

٩-١) أوجد حل المسألة

$$x'' = (-2/t)x'(t) + (2/t^2)x(t) + [10\cos(\ln(t))]/t^2$$

عبر الفترة [1 , 3] ، حيث $x(1) = 1 , x(3) = -1$.

٩-٢) أوجد حل المسألة

$$x'' = -5x'(t) - 6x(t) + te^{-2t} + 3.9\cos(3t)$$

عبر الفترة [0 , 3] ، حيث $x(3) = 0.15$.$x(0) = 0.95$

٩-٣) أوجد حل المسألة

$$x'' = -2x'(t) - 2x(t) + e^{-t} + \sin(2t)$$

عبر الفترة [0 , 4] ، حيث $x(4) = -0.1$.$x(0) = 0.6$

٩-٤) أوجد حل المسألة

$$x'' = -4x'(t) - 4x(t) + 5\cos(4t) + \sin(2t)$$

عبر الفترة [0 , 2] ، حيث $x(2) = 0.25$.$x(0) = 0.75$

٩-٥) أوجد حل المسألة

$$x'' + (1/t)x' + \left[1 - 1/(4t^2)\right]x = 0$$

عبر الفترة [1 , 6] ، حيث $x(6) = 0$, $x(1) = 1$.

٩-٦) أوجد حل المسألة

$$x'' + (2/t)\,x' - (2/t^2)\,x = \sin(t)/t^2$$

عبر الفترة [1 , 6] ، حيث $x(6) = 0.02$, $x(1) = -0.02$.

٩-٧) أوجد حل المسألة

$$x'' + (1/t)\,x' + \left[1 - 1/(4t^2)\right]x = \sqrt{t}\cos(t)$$

عبر الفترة [1 , 6] ، حيث $x(6) = -0.5$, $x(1) = 1.0$.

٩-٨) أوجد حل المسألة

$$x'' - (1/t)\,x' + (1/t^2)\,x = 1$$

عبر الفترة [0.5 , 4.5] ، حيث $x(4.5) = 2$, $x(0.5) = 1$.

٩-٩) أوجد حل المسألة

$$x'' + (1/t)x' + (16/t^2)\,x = 1/t^2$$

عبر الفترة [1 , 7] ، حيث $x(7) = 0.30$, $x(1) = 0.75$.

٩-١٠) نفرض أن p , q , r دوال متصلة على الفترة $[a\ ,\ b]$ ، وأن $q(t) \geq 0\ ;\quad a \leq t \leq b$. إذا كانت h تحقق الشرط $0 < h < 2/M$ حيث $M = \max_{a \leq t \leq b} \{|\,p(t)\,|\}$ ، فاثبت أن مصفوفة المعاملات (coefficient matrix) في العلاقة (6) تحقق شرط السيطرة القطرية (diagonal dominance) ، وأن هناك حلا وحيدا (a unique solution).

٩-١١) نفرض أن $p(t) \equiv C_1 > 0$ وأن $q(t) \equiv C_2 > 0$.

أ) اكتب النظام الخطي ثلاثي القطرية (tridiagonal linear system) لهذه الحالة.

ب) اثبت أن النظام ثلاثي القطرية مسيطر قطريا (diagonally dominant) ، وبالتالي يكون له حل وحيد بشرط أن $h < C_1 / C_2$.

تمرينات عامة

(١) تُعرَّف طريقة بيكارد (Picard's method) لحل مسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dy}{dt} \equiv y' = f(t,y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = y_0$$

كما يلي:

نفرض أن $y^{[0]}(t) = y_0 \quad \forall\, t \in [a,b]$

عرِّف متتابعة الدوال $\left\{ y^{[k]}(t) \right\}$ بالعلاقة التكريرية

$$y^{[k]}(t) = y_0 + \int_a^t f\left(\tau, y^{[k-1]}(\tau)\right) d\tau\,; \quad k = 1,2,... \quad (*)$$

(أ) كامل $y' = f(t, y(t))$ ، واستخدم الشرط الابتدائي لاستنتاج طريقة بيكارد ، أي استنتاج العلاقة التكريرية (*).

(ب) قم بتوليد (generate) $y^{[0]}(x), y^{[1]}(x), y^{[2]}(x)$ لمسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dy}{dx} \equiv y' = \left(x^2 + y^2\right) \equiv f(x,y); \quad y(0) = 1$$

(ج) قارن النتيجة التي حصلت عليها مع الحل الذي تحصل عليه باستخدام مفكوك متسلسلة تايلور.

(د) إذا قمنا بإنهاء المتسلسلة التي حصلنا عليها (obtained series is terminated) بطريقة بيكارد في (ب) بعد الحد الرابع ، أوجد مدى (range) قيم x الذي تقوم خلاله الحدودية الناتجة (resulting polynomial) بتمثيل y (representing) صحيحة لأربعة أرقام عشرية (4 decimal places).

(٢) (أ) طبق طريقة التقريبات المتتابعة لبيكارد (method of Picard's successive approximations) لحل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = -y + t + 1; \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1.$$

وذلك بتوليد الصيغ: $y^{[0]}(t), \quad y^{[1]}(t), \quad y^{[2]}(t), \quad y^{[3]}(t)$.

(ب) قارن النيجة التي حصلت عليها في (ب) مع متسلسلة ماكلورين (Maclaurin series) للحل المضبوط $y(t) = t + e^{-t}$.

(٣) أوجد صيغ بيكارد التكريرية $y^{[1]}, y^{[2]}, y^{[3]}$ لكل من المسائل التالية ، وقارنها مع الحل الصحيح y:

(أ) $y' = -y; \quad y(0) = 1$

(ب) $y' = -xy; \quad y(1) = 2$

(ج) $y' = y + 2\cos(x); \quad y(0) = 1$

(٤) نفرض أن لدينا مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = \frac{2}{t}y + t^2 e^t; \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 0$$

والتي حلها المضبوط $y(t) = t^2\left(e^t - e\right)$

(أ) استخدم طريقة أويلر بحجم خطوة h = 0.1 لإيجاد حل تقريبي وقارنه بقيم y المضبوطة.

(ب) استخدم الإجابات التي حصلت عليها في أ) والاستكمال الخطي (linear interpolation) لإيجاد تقريبات لقيم y التالية ، وقارنها مع القيم المضبوطة:

(i) y(1.04) (ii) y(1.55) (iii) y(1.97)

(ج) احسب قيمة h اللازمة لتحقق الشرط

$$|e_k| \equiv |y(t_k) - y_k| \le 0.1$$

وذلك باستخدام العلاقة

$$|e_k| \equiv |y(t_k) - y_k| \le \frac{Qh}{2L}\left[e^{khL} - 1\right]$$

(٥) نفرض أن لدينا مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = \frac{2}{t}y + t^2 e^t ; \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 0$$

والتي حلها المضبوط $y(t) = t^2\left(e^t - e\right)$

(أ) استخدم طريقة تايلور من الرتبة الثانية بحجم خطوة $h = 0.1$ لإيجاد حل تقريبي ، وقارن بقيم y المضبوطة.

(ب) استخدم الإجابات التي حصلت عليها في أ) والاستكمال الخطي لإيجاد تقريبات لقيم y التالية ، وقارنها مع القيم المضبوطة.

(i) y (1.04) (ii) y (1.55) (iii) y (1.97)

(ج) استخدم طريقة تايلور من الرتبة الرابعة بحجم خطوة $h = 0.1$ لإيجاد حل تقريبي ، وقارن بقيم y المضبوطة.

(د) استخدم الإجابات التي حصلت عليها في ج) والاستكمال التكعيبي التجزيئي بطريقة "هرميت" (piecewise cubic Hermite interpolation) لإيجاد تقريبات لقيم y التالية ، وقارنها مع القيم المضبوطة.

(i) y (1.04) (ii) y (1.55) (iii) y (1.97)

(٦) أطلقت قذيفة (projectile) كتلتها $m = 0.11$ kg رأسيا لأعلى بسرعة ابتدائية $v(0) = 8$ m/s. وأخذت سرعتها في التناقص بسبب قوة الجاذبية (force of gavity) $Fg = mg$ وبسبب مقاومة الهواء (air resistance) $F_r = -kv|v|$ ، حيث $k = 0.002$ kg/m وتعطي المعادلة التفاضلية للسرعة v بالعلاقة $g = -9.8 m/s^2$

$$mv' = mg - kv|v|$$

(أ) أوجد السرعة بعد $0.1, 0.2, \ldots, 1.0$ s

ملاحظة : استخدم في الحل i) طريقة تايلور من الرتبة الثانية.

ii) طريقة تايلور من الرتبة الرابعة.

(ب) لأقرب جزء عشري من الثانية (nearest tenth of a second) حدد متى تصل القذيفة إلى أقصى ارتفاع لها لتبدأ بعد ذلك في السقوط.

(٧) (i) استخدم طريقة هوين (طريقة أويلر المحسَّنة) لإيجاد حلول تقريبية لكل من مسائل القيمة الابتدائية التالية ، وقارن النتائج مع الحلول الصحيحة:

(أ) $y' = \frac{y}{t} - \left(\frac{y}{t}\right)^2; \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 1$

استخدم حجم الخطوة $h = 0.1$

الحل الصحيح : $y(t) = t/(1 + \ell n\, t)$

(ب) $y' = 1 + \frac{y}{t} + \left(\frac{y}{t}\right)^2; \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = 0$

استخدم حجم الخطوة $h = 0.2$

الحل الصحيح : $y(t) = t \tan(\ell n\, t)$

(ج) $y' = -(y+1)(y+3); \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = -2$

استخدم حجم الخطوة $h = 0.2$

الحل الصحيح : $y(t) = -3 + 2\left(1 + e^{-2t}\right)^{-1}$

(د) $y' = -5y + 5t^2 + 2t; \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = \frac{1}{3}$

استخدم حجم الخطوة $h = 0.2$

الحل الصحيح : $y(t) = t^2 + \frac{1}{3} e^{-5t}$

(ii) استخدم نتائج الجزء (i) من السؤال والاستكمال الخطي لتحصل على تقريبات لقيم y التالية ، وقارن القيم الناتجة مع القيم الصحيحة:

(أ) $y(1.25)$, $y(1.93)$ (ب) $y(2.1)$, $y(2.75)$

(ج) $y(1.3)$, $y(1.93)$ (د) $y(0.54)$,

$y(0.94)$

(٨) (i) أعد حل السؤال (٧)–(i) باستخدام طريقة أويلر – كوشي المعدَّلة (modified Euler-Cauchy method) [والتي تسمى أيضا طريقة النقطة المتوسطة (Midpoint method)].

(ii) أعد حل السؤال (٧)–(ii) باستخدام نتائج (٨)–(i).

(٩) أعل حل السؤال (٧)–(i) باستخدام طريقة رونج – كوتا من الرتبة الرابعة.

(١٠) طبق طريقة رونج – كوتا – فهلبرج باستخدام

$$Tol = 10^{-4}, \quad Hmax = 0.25, \quad Hmin = 0.05$$

لإيجاد حلول تقريبية لمسائل القيمة الابتدائية التالية ، وقارن النتائج مع القيم الصحيحة:

(أ) $y' = te^{3t} - 2y; \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 0$

الحل الصحيح : $y(t) = \frac{1}{5} t\, e^{3t} - \frac{1}{25} e^{3t} + \frac{1}{25} e^{-2t}$

(ب) $y' = 1 + (t - y)^2; \quad 0 \le t \le 3, \quad y(2) = 1$

الحل الصحيح : $y(t) = t + 1/(1 - t)$

(ج) $y' = 1 + \frac{y}{t}; \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 2$

الحل الصحيح : $y(t) = t \ln t + 2t$

(د) $y' = \cos 2t + \sin 3t; \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$

الحل الصحيح : $y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1}{3}\cos 3t + \frac{4}{3}$

(١١) استخدم صيغة آدمز – باشفورث للتنبؤ / للتقدير [المعادلة (2) في الفصل السادس] لإيجاد حلول تقريبية لمسائل القيمة الابتدائية التالية. استخدم طريقة رونج – كوتا من الرتبة الرابعة للحصول على القيم الابتدائية (starting values) . قارن النتائج التي تحصل عليها (الحلول التقريبية) مع الحلول المضبوطة.

(أ) $y' = \frac{y}{t} - \left(\frac{y}{t}\right)^2; \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 1$

استخدم حجم الخطوة $h = 0.1$

الحل المضبوط: $y(t) = \frac{t}{1+\ln t}$

(ب) $y' = 1 + \frac{y}{t} + \left(\frac{y}{t}\right)^2; \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = 0$

استخدم حجم الخطوة $h = 0.2$

الحل المضبوط: $y(t) = t\tan(\ln t)$

(ج) $y' = -(y+1)(y+3); \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = -2$

استخدم حجم الخطوة $h = 0.1$

الحل المضبوط: $y(t) = -3 + \frac{2}{1+e^{-2t}}$

(د) $y' = -5y + 5t^2 + 2t; \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1/3$

استخدم حجم الخطوة $h = 0.1$

الحل المضبوط: $y(t) = t^2 + \frac{1}{3} + e^{-5t}$

(١٢) استخدم طريقة آدمز – باشفورث – مولتن للتقدير والتصحيح لإيجاد حلول تقريبية لمسائل القيمة الابتدائية المعطاة في المسألة السابقة (١١).

(١٣) مسألة القيمة الابتدائية $y' = e^y ; \quad 0 \le t \le 0.20 , \quad y(0) = 1$

حلها الصحيح هو

$$y(t) = 1 - \ln (1 - et)$$

تطبيق صيغة آدمز – مولتن للتصحيح [المعادلة (3) في الفصل السادس] لحل هذه المسألة يكافئ إيجاد النقطة الثابتة (fixed point) y_{k+1} للعلاقة

$$g(y) = y_k + \frac{h}{24}\left[e^{y_{k-2}} - 5e^{y_{k-1}} + 19e^{y_k} + 9e^{y}\right]$$

(أ) مستخدما حجم الخطوة $h = 0.01$ ، احصل على y_{k+1} بالتكرير الدالي (functional iteration) بالتعويض $k = 2,3,...,19$ ، واستخدم قيما ابتدائية مضبوطة y_0, y_1, y_2 (exact starting values). وفي كل خطوة استخدم y_k للحصول على قيمة تقريبية ابتدائية لـ y_{k+1}.

(ب) هل تقوم طريقة نيوتن (Newton's method) بتسريع التقارب (speeding the convergence) أفضل من التكرير الدالي؟

(١٤) استخدم طريقة رونج – كوتا للنظم لتقريب حلول نظم المعادلات التفاضلية الآتية التالية من الرتبة الأولى ، وقارن النتائج مع الحلول المضبوطة:

(أ)

$$u_1' = 3u_1 + 2u_2 - \left(2t^2+1\right)e^{2t} , \quad 0 \le t \le 1, \quad u_1(0) = 1;$$

$$u_2' = 4u_1 + u_2 + \left(t^2+2t-4\right)e^{2t} , \quad 0 \le t \le 1, \quad u_2(0) = 1;$$

$$h = 0.2 ;$$

الحل المضبوط:

$$u_1(t) = \tfrac{1}{3}e^{5t} - \tfrac{1}{3}e^{-t} + e^{2t}, \quad u_2(t) = \tfrac{1}{3}e^{5t} + \tfrac{2}{3}e^{-t} + t^2e^{2t}$$

(ب)

$$u_1' = -4u_1 - 2u_2 + \cos t + 4\sin t,\quad 0 \le t \le 2,\quad u_1(0) = 0;$$
$$u_2' = 3u_1 + u_2 - 3\sin t,\quad 0 \le t \le 2,\quad u_2(0) = -1;$$
$$h = 0.1;$$

الحل المضبوط:

$$u_1(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t} + \sin t,\quad u_2(t) = -3e^{-t} + 2e^{-2t}$$

(ج)

$$u_1' = u_2,\quad 0 \le t \le 2,\quad u_1(0) = 1;$$
$$u_2' = -u_1 - 2e^{t} + 1,\quad 0 \le t \le 2,\quad u_2(0) = 0;$$
$$u_3' = -u_1 - e^{t} + 1,\quad 0 \le t \le 2,\quad u_3(0) = 1;$$
$$h = 0.5;$$

الحل المضبوط:

$$u_1(t) = \cos t + \sin t - e^{t} + 1,\quad u_2(t) = -\sin t + \cos t - e^{t}$$
$$u_3(t) = -\sin t + \cos t.$$

(د)

$$u_1' = u_2 - u_3 + t,\quad 0 \le t \le 1,\quad u_1(0) = 1;$$
$$u_2' = 3t^2,\quad 0 \le t \le 1,\quad u_2(0) = 1;$$
$$u_3' = u_2 + e^{-t},\quad 0 \le t \le 1,\quad u_2(0) = -1;$$
$$h = 0.1;$$

الحل المضبوط:

$$u_1(t) = -0.05t^5 + 0.25t^4 + t + 2 - e^{-t},\quad u_2(t) = t^3 + 1,$$
$$u_3(t) = 0.25t^4 + t - e^{-t}.$$

(١٥) طبق طريقة آدمز – باشفورث – مولتن للتقدير والتصحيح لإيجاد حلول تقريبية لنظم المعادلات التفاضلية الآنية التالية من الرتبة الأولى:

(أ)

$$y'' - 2y' + 2y = te^{t} - t,\quad 0 \le t \le 1,\quad y(0) = y'(0) = 0,$$
$$h = 0.1;$$

الحل المضبوط:

$$y(t) = \frac{1}{6}t^3e^t - te^t + 2e^t - t - 2.$$

(ب)

$$t^2y'' - 2ty' + 2y = t^3\ln t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0,$$
$$h = 0.1;$$

الحل المضبوط:

$$y(t) = \frac{7}{4}t + \frac{1}{2}t^3\ln t - \frac{3}{4}t^3.$$

(ج)

$$y''' + 2y'' - y' - 2y = e^t, \ 0 \le t \le 3, \ y(0) = 1, \ y'(0) = 2, \ y''(0) = 0,$$
$$h = 0.2;$$

الحل المضبوط:

$$y(t) = \frac{43}{36}e^t + \frac{3}{4}e^{-t} - \frac{4}{9}e^{-2t} + \frac{1}{6}te^t.$$

(د)

$$t^3y''' - t^2y'' + 3ty' - 4y = 5t^3\ln t + 9t^3, \quad 1 \le t \le 2,$$
$$y(1) = 0, \quad y'(1) = 1, \quad y''(1) = 3,$$
$$h = 0.1;$$

الحل المضبوط:

$$y(t) = -t^2 + t\cos(\ln t) + t\sin(\ln t) + t^3\ln t.$$

(١٦) نفرض أن مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y); \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

سنقربها بطريقة فروق أحادية الخطوة (one-step difference method) صيغتها:

$$y_0 = \alpha,$$
$$y_{k+1} = y_k + h\,\phi(t_k, y_k, h)$$

ونفرض أيضا أنه يوجد عدد $h_0 > 0$ وأن $\phi(t,y,h)$ دالة متصلة وتُحقق شرط ليبشتز (a Lipschitz conditon) في المتغير y بثابت ليبشتز L على المجموعة

$$D = \{(t,y,h) | a \le t \le b, -\infty < y < \infty, 0 \le h \le h_0\}$$

اثبت أن هذه الطريقة مستقرة (stable).

إرشاد: اثبت أن الفروض المعطاة تعني وجود ثابت $k > 0$ بحيث أن

$$|u_k - v_k| \le K |u_0 - v_0| \quad \forall k, \quad 1 \le k \le N$$

كلما حققت $\{v_k ; k = 1,2,...,n\}, \{u_k ; k = 1,2,...,N\}$ معادلة الفروق $y_{k+1} = y_k + h\,\phi(t_k, y_k, h)$ (difference equation).

(١٧) نفرض أن لدينا الطريقة متعددة الخطوات (multistep method)

$$y_{k+1} = -\frac{3}{4}y_k + 3y_{k-1} - \frac{1}{2}y_{k-2} + 3h\, f(t_k, y_k);$$
$$k = 2,3,...,N-1.$$

(أ) أوجد خطأ الاقتطاع المحلي (ℓte).

(ب) عقِّب على كل من اتساق / تواؤم (consistency) واستقرار (stability) وتقارب (convergence) الطريقة.

(١٨) ادرس استقرار طريقة الفروق (difference method)

$$y_{k+1} = -4y_k + 5y_{k-1} + 2h\,[f(t_k, y_k) + 2hf(t_{k-1}, y_{k-1})];$$
$$k = 1,2,...,N-1.$$

مع القيمتين الابتدائيتين y_0 , y_1.

أجوبة تمرينات رقم ١

١-١) ب)

1. L = 1
3. L = 3
5. L = 60

١-٣) ج) لا ، لأن $f_y(t,y) = \frac{1}{2} y^{-\frac{2}{3}}$

ليست دالة متصلة عند $t = 0$ ، و $\lim_{y \to 0} f_y(t,y) = \infty$.

١-٦)

1. $y(t) = t^3 - \cos(t) + 3$
3. $y(t) = \int_0^t e^{-s^2/2} ds$

١-٨) ب)

$$y(t) = y_0 \, e^{-0.000120968\, t}$$

ج) 2808 سنة.

د) 6.9237 ثانية.

أجوبة تمرينات رقم ٢

(١-٢

$$y_{i+1} = y_i + h\, f(x_i, y_i)$$
$$= y_i + h\left(x_i - 0.1\, y_i^2\right)$$
$$y_1 = y_0 + h\left(x_0 - 0.1\, y_0^2\right) = 1 + 0.1(0 - 0.1*1) = 0.99$$
$$y_2 = 0.99 + 0.1\left(0.1 - 0.1*0.99^2\right) = 0.990199$$
$$y_3 = 0.990199 + 0.1\left(0.2 - 0.1*0.990199^2\right) =$$
$$= 1.000394 \approx 1.0004$$

(٢-٢

$$y_{i+1} = y_i + 0.5\left(x_i^2 - y_i^2\right)$$

$x_0 = -1$, $y_0 = 1$

-1	-0.5	0	0.5	1
X_0	X_1	X_2	X_3	X_4

$y_1 = 1$, $y_2 = 0.625$, $y_3 = 0.4296874$, $y_4 = 0.4623717$

(٣-٢

$$y' = x\, y^{\frac{1}{3}}$$

$\Rightarrow$ exact solution: $y = \left(\frac{2+x^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$

$$y_{exact}(1.2) = \left(\frac{2+1.44}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = 1.22788$$

Euler: $y_{i+1} = y_i + 0.1\, x_i\, y_i^{\frac{1}{3}}$

$y_1 = 1.1$, $y_2 = 1.2135508$

Error = 0.0143292

(٤-٢

Error $\equiv$ E & h

$y \equiv y_{exact} = y_1 + E_1 \ldots (1)$

$y \equiv y_{exact} = y_2 + E_2 \ldots (2)$

$h_1 = 0.05$, $h_2 = 0.1$

$h_2 = 2h_1 \Rightarrow E_2 = 2E_1 \quad (3) \quad (E \alpha h)$

$$(1)\ \&\ (3) \Rightarrow \quad 2y = 2y_1 + E_2 \qquad (4)$$
$$y = y_2 + E_2 \qquad (2)$$

$$(4) - (2) \Rightarrow \quad y = 2y_1 - y_2$$

$$\Rightarrow \quad y = 2.45452 - 1.22595 = 1.22857$$

٢-٥) أ) (i) 1.44

(ii) 1.4641

ب) $y \equiv y_{Richardson} = 1.4882$

$y(0.4) \equiv y_{exact} = 1.491824$

Error ratio = $7.648826 : 1 \approx 8 : 1$

ج) $\frac{0.4}{0.0130739} = 30.5953 \approx 30$ steps

٢-٧)

$$y' = t^2 - y; \quad y(0) = 1$$

الحلول بطريقة أويلر عند بعض النقاط مع القيم المضبوطة للحلول مبينة بالجدول التالي:

t_k	y_k			Exact
	h = 0.2	h = 0.1	h = 0.05	$y(t_k)$
0.05			0.95	0.951271
0.1		0.9	0.902625	0.905163
0.15			0.857994	0.861792
0.2	0.8	0.811	0.816219	0.821269
1.0	0.537856	0.586189	0.609438	0.632121
2.0	1.714101	1.790581	1.827913	1.864665

٢-٩)

$$y' = -t\,y; \quad y(0) = 1$$

الحلول بطريقة أويلر مع القيم المضبوطة مبينة بالجدول التالي:

t_k	y_k			Exact
	h = 0.2	h = 0.1	h = 0.05	$y(t_k)$

0.05			1.0	0.998751
0.1		1.0	0.9975	0.995012
0.15			0.992513	0.988813
0.2	1.0	0.99	0.985069	0.980199
1.0	0.652861	0.628157	0.616984	0.606531
2.0	0.124379	0.130400	0.132980	0.135335

٢-١٢) أ)

$y_5 = 1000\,(1 + 0.12)^5 = 1762.3417$

$y_{60} = 1000\,(1 + 0.01)^{60} = 1816.6967$

$$y_{1800} = 1000\left(1 + \frac{0.12}{360}\right)^{1800} = 1821.9355$$

٢-١٤)

$$Pk + 1 = Pk + \left(0.02Pk - 0.00004\,P_k^2\right)10\,; \quad k = 1,2,...,8\,.$$

Year	t_k	Actual population at t_k, $P(t_k)$	P_k	
			Euler rounded at each step	Euler with more digits carried at each step
1900	0.0	76.1	76.1	76.1
1910	10.0	92.4	89.0	89.0035
1920	20.0	106.5	103.6	103.6356
1930	30.0	123.1	120.0	120.0666
1940	40.0	132.6	138.2	138.3135
1950	50.0	152.3	158.2	158.3239
1960	60.0	180.7	179.8	179.9621
1970	70.0	204.9	202.8	203.0000
1980	80.0	226.5	226.9	227.1164

٢-١٩) لا ، لأنه لأي عدد صحيح M فإن طريقة أويلر لحل هذه المسألة تنتج قيما y_k تحقق العلاقات:

$$0 < y_1 < y_2 < ... < y_M$$

والحل الرياضي المضبوط هو $y(t) = \tan t$ ، أي أن $y(3) < 0$

أجوبة تمرينات رقم ٣

(٣-١

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[-x_k y_k^2 - (x_k + h)\left\{y_k - h\, x_k y_k^2\right\}^2 \right]$$

أ) ضع في هذه الصيغة :

$k = 0, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 2, \quad h = 0.2$

$$y_1 = 2 + 0.1\left[0 - 0.2\{2\}^2\right] = 1.92$$

ب) ضع $k = 0, \quad x_0 = 0, y_0 = 2, \quad h = 0.1$

(ثم $k = 1$)

$$y_1 = 2 + \frac{0.1}{2}\left[0 - 0.1\{2\}^2 \right] = 1.98$$

$$y_2 = 1.98 + \frac{0.1}{2}\left[-0.1*1.98^2 - 0.2\left\{1.98 - 0.1*0.1*1.98^2 \right\}^2 \right]$$

$= 1.9227312$

Exact Solution: $y = 2/(1 + x^2)$

$\Rightarrow y(0.2) = 2/(1 + 0.04) = 1.9230769$

$E_a = 0.0030769$

$E_b = 0.0003457$

i.e. $h \to 0 \Rightarrow E \to 0 \Rightarrow$ Heun's method : convergent تقاربية.

(٣-٢

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(y_k + y_k + h\, y_k)$$

$$= \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right) y_k$$

$$\Rightarrow y_1 = \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right) y_0 = 1 + h + \frac{h^2}{2}$$

$$y_2 = \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right). \quad y_1 = \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right)^2$$

$$\vdots$$

$$y_n = \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow A(h) = 1 + h + \frac{h^2}{2}$$ أ)

ب)

$$h = 0.2 \Rightarrow y\big|_{x=0.2} \equiv y_1 = 1 + 0.2 + \frac{0.2^2}{2} = 1.22$$

$$h = 0.02 \Rightarrow y\big|_{x=0.2} \equiv y_{10} = \left(1 + 0.02 + \frac{0.02^2}{2}\right)^{10}$$

$$= (1.0202)^{10} = 1.221387$$

Exact Sol. : $y(x) = e^x$

$y(0.2) = e^{0.2} = 1.221403$

$h = 0.2 \Rightarrow E = 1.221403 - 1.22 = 0.001403$

$h = 0.02 \Rightarrow E = 1.221403 - 1.221387 = 0.000016$

i.e. $h \to 0 \Rightarrow E \to 0$

$\Rightarrow$ Heun's method : convergent تقاربية

٣-٣) أ)

$$y' = 2x \Rightarrow dy = 2x\,dx \Rightarrow y = x^2 + c$$

$$\Rightarrow y = x^2 \quad (y(1) = 1)$$

$$y' = \frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y = 2\ln x + \ln c$$

$$\Rightarrow y = x^2 \quad (y(1) = 1)$$

ب)

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, y_k) + f\left(x_{k+1}, y_k + h\, f(x_k, y_k)\right)\right]$$

(I) $y' \equiv f(x,y) = 2x \Rightarrow$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(2x_k + 2x_{k+1}\right)$$

$$= y_k + h\left(x_k + x_{k+1}\right) \quad \text{.....(*)}$$

$$y_k = x_k^2 \Rightarrow x_{k+1}^2 = x_k^2 + h\left(x_k + x_{k+1}\right)$$

$$\Rightarrow (x_k + h)^2 = x_k^2 + h\left(x_k + x_k + h\right)$$

$$\Rightarrow (x_k + h)^2 = x_k^2 + 2h\, x_k + h^2 \qquad (\text{true})$$

(II) $y' \equiv f(x,y) = \frac{2y}{x} \Rightarrow$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(\frac{2y_k}{x_k} + 2\, \frac{y_k + h.\frac{2y_k}{x_k}}{x_{k+1}} \right)$$

$$= y_k + h\left(\frac{y_k}{x_k} + \frac{y_k + h.\frac{2y_k}{x_k}}{x_{k+1}} \right) \quad \text{.....(**)}$$

$$y_k = x_k^2 \Rightarrow$$

$$x_{k+1}^2 = x_k^2 + h\left(x_k + \frac{x_k^2 + 2h\, x_k}{x_{k+1}} \right)$$

$$\Rightarrow (x_k + h)^2 = x_k^2 + h\, x_k + h\, x_k\, \frac{x_k + 2h}{x_k + h}$$

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow h^2 = 0 \quad \times \qquad (\text{مستحيل})$$

(ج

(I) $y_1 = y_0 + h\,(x_0 + x_1)$ from (*)

$= 1 + 0.1\,(1 + 1.1) = 1.21$

Error $= (1.1)^2 - 1.21 = 0$ (كما هو متوقع)

(II) $y_1 = y_0 + h\left(\frac{y_0}{x_0} + \frac{y_0 + h.\frac{2y_0}{x_0}}{x_1}\right) \cdots \text{from } (**)$

$$= 1 + 0.1\left(\frac{1}{1} + \frac{1 + 0.1 * \frac{2}{1}}{1.1}\right) = 1.2090909$$

Error = 1.21 – 1.2090909 = 0.0009091

٣-٤) الحلول بطريقة هوين للمسألة $y' = t^2 - y; \quad y(0) = 1$

t_k	y_k			Exact $y(t_k)$
	h = 0.2	h = 0.1	h = 0.05	
0.05			0.951313	0.951271
0.1		0.9055	0.905245	0.905163
0.15			0.861915	0.861792
0.2	0.824	0.821928	0.821431	0.821269
1.0	0.643244	0.634782	0.632772	0.632121
2.0	1.881720	1.868726	1.865656	1.864665

٣-٦)

$y' = -ty; \quad y(0) = 1$

t_k	y_k			Exact $y(t_k)$
	h = 0.2	h = 0.1	h = 0.05	
0.05			0.99875	0.998751
0.1		0.995	0.995011	0.995012
0.15			0.988811	0.988813
0.2	0.98	0.980175	0.980196	0.980199
1.0	0.606975	0.606718	0.606586	0.606531
2.0	0.139628	0.136318	0.135571	0.135335

٣-٩)

$v' = -32 - 0.1v; \quad t \in [0,30], \quad v(0) = 160$

t_k	v_k
1.00	114.341
2.00	73.025
3.00	35.639
4.00	1.809
5.00	-28.802
10.00	-143.341
20.00	-254.983
30.00	-296.071

٣-١٢) الجدول التالي يعطي القيم التقريبية لـ $y(3)$ محسوبة بتحسينات ريتشاردسون لحل المسألة

$$y' = \frac{t-y}{2}; \quad t \in [0,3], \quad y(0)=1$$

h	y_h	$[4y_h - y_{2h}]/3$
1	1.732422	
$\frac{1}{2}$	1.682121	1.665354
$\frac{1}{4}$	1.672269	1.668985
$\frac{1}{8}$	1.670076	1.669345
$\frac{1}{16}$	1.669558	1.669385
$\frac{1}{32}$	1.669432	1.669390
$\frac{1}{64}$	1.669401	1.669391

٣-١٣) $y' = 1.5y^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f(t,y)=1.5y^{\frac{1}{3}} \Rightarrow$

$f_y(t,y) = 0.5\,y^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow$ [غير موجودة $f_y(0,0)$]

أي أن مسألة القيمة الابتدائية لا تحقق شرط وجود المشتقة f_y عبر أي منطقة مستطيلة تحتوي على (0,0) ، وبالتالي تكون المسألة

غير محددة / غير معرفة تعريفا كاملا (not well-posed) عبر هذه المنطقة.

أجوبة تمرينات رقم ٤

(٤-١

$$y_{i+1} = y_i + h\, y'_i + \frac{h^2}{2!} y''_i$$

$$y' = xy^{\frac{1}{3}}$$

$$y'' = \frac{1}{3} xy' y^{-\frac{2}{3}} + y^{\frac{1}{3}}$$

$$y'_0 = x_0\, y^{\frac{1}{3}} = 1$$

$$y''_0 = \frac{1}{3} + 1 = 1.333333$$

$$y_1 = 1 + 0.1 + \frac{0.01}{2} \times \frac{4}{3} = 1.1066666$$

$$y'_1 = x_1 y_1^{\frac{1}{3}} = 1.1 \times (1.1066666)^{\frac{1}{3}} = 1.1377971$$

$$y''_1 = \frac{1}{3} \times 1.1 \times 1.1377971 \times (1.1066666)^{\frac{2}{3}} + (1.1066666)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 1.4242956$$

$$y_2 = 1.10666666 + 0.1 \times 1.1377971 + \frac{0.01}{2} \times 1.4242956$$

$$= 1.2275677$$

$$y_{ex}(x) = \left(\frac{2+x^2}{3} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$y_{ex}(1.2) = 1.22788$$

Error = 0.0003123

(٤-٢

$$y' = -y, \quad y'' = -y' = y$$

$$y_{i+1} = y_i - h y_i + \frac{h2}{2} y_i = y_i \left(1 - h + \frac{h2}{2}\right)$$

$$h = 0.1 \Rightarrow \quad y_{i+1} = 0.905\, y_i$$

$$\Rightarrow \quad y_4 = (0.905)^4 = 0.6708$$

(٣-٤) (i

$$y' = -2xy\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0$$
$$y'' = -2(xy' + y)\,, \quad y''(0) = -2$$
$$y''' = -2(xy'' + 2y')\,, \quad y'''(0) = 0$$

Taylor: $y(x) = y(0) + xy'(0) + \frac{x^2}{2!}y''(0) + \frac{x^3}{3!}y'''(0) + \ldots$

$$= 1 - x^2$$

$y_1 (\equiv y \text{ at } x = 0.1) = 1 - 0.01 = 0.99$

Taylor: $y(0.1) = 0.99, \quad y'(0.1) = -2 * 0.1 * 0.99 = -0.198,$

$$y''(0.1) = -2(0.1 * -0.198 + 0.99) = -1.9404$$
$$y'''(0.1) = -2(0.1 * -1.9404 + 2 * -0.198)$$
$$= 1.18008$$

$$y(x + h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(x) + \ldots$$

$$y\big|_{x=0.2} = 0.99 + 0.1 * -0.198 + \frac{0.01}{2} * -1.9404 +$$
$$+ \frac{0.001}{6} * 1.18008 = 0.960695$$

(ii

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf(x_i, y_i)$$

نظرا لأن $h = 0.1$ ، والمطلوب إيجاد قيمة y عند $x = 0.2$ فيكون المطلوب إيجاد قيمة y_2 .

$$y_1 = 0.99$$
$$y_2 = y_0 + 0.2\, f(x_1, y_1) = y_0 - 0.2 * 2\, x_1\, y_1$$
$$= 1 - 0.4 * 0.1 * 0.99 = 0.9604$$
$$y_{ex}(x) = e^{-x^2}$$
$$y_{ex}(0.2) = e^{-0.04} = 0.9607897$$

Error = 0.0003897

Error in (i) = 0.0000947

أي أن طريقة تايلور أفضل.

$$y_3 = y_1 + 2h\, f(x_2, y_2) = y_1 - 4h\, x_2\, y_2$$
$$= 0.99 - 0.4 * 0.2 * 0.9604 = 0.913168$$

(٤-٤) (i)

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2!} y''(x_0) + \ldots$$

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad h \equiv x$$

$$y(x) = 0 + xy'_0 + \frac{x^2}{2!} y''_0 + \frac{x^3}{3!} y'''_0 + \ldots$$

$$y' = x - y \Rightarrow y'_0 = x_0 - y_0 = 0$$

$$y'' = 1 - y' \Rightarrow y''_0 = 1 - y'_0 = 1$$

$$y''' = -y'' \Rightarrow y'''_0 = -1$$

$$y'''' = -y''' \Rightarrow y''''_0 = 1$$

$$y^{(5)} = -y^{(4)} \Rightarrow y_o^{(5)} = -1$$

$$y(x) = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!}$$

(ii حتى تكون قيم y صحيحة لثلاثة أرقام عشرية فإن :

$$\left|\frac{x^5}{5!}\right| < 0.5x10^{-3} \Rightarrow |x| < 0.5696791 \Rightarrow$$

$$-0.5696791 < x < 0.5696791$$

(iii $$y|_{x=0.2} = \frac{(0.2)^2}{2!} - \frac{(0.2)^3}{3!} + \frac{(0.2)^4}{4!} = 0.01873334$$

$$y_{ex}(0.2) = 0.2 - 1 + e^{-0.2} = 0.01873075$$

$$\text{Error} = 0.0000025 = 0.254x10^{-5}$$

(صحيح لخمسة أرقام عشرية)

(iv $$y|_{x=0.1} = \frac{0.1^2}{2!} - \frac{0.1^3}{3!} + \frac{0.1^4}{4!} = 0.0048375$$

والآن للحصول على قيمة y عند $x = 0.2$ نعتبر :

$$x_0 = 0.1, \quad y_0 = 0.0048375$$

$$y|_{x=0.2} = y_0 + 0.1y'_0 + \frac{(0.1)^2}{2!} y''_0 + \frac{(0.1)^3}{3!} y'''_0 + \frac{(0.1)^4}{4!} y''''_0 \quad .$$

$$y'_0 = x_0 - y_0 = 0.0951625$$
$$y''_0 = 1 - y'_0 = 0.09048375$$
$$y'''_0 = -y''_0 = -0.9048375$$
$$y''''_0 = -y'''_0 = 0.9048375$$
$$\Rightarrow y|_{x=0.2} = 0.0187309$$
Error = 0.00000015

أي أن القيمة صحيحة لستة أرقام عشرية ، وبالتالي فهذه النتيجة أفضل من تلك التي حصلنا عليها في الجزء (iii).

(٤-٦)

$$y(x+0) = y(0) + x.y'(0) + \frac{x^2}{2!}y''(0) + \frac{x^3}{3!}y'''(0) + \cdots (\text{Taylor})$$
$$y' = 1 - 3x^3 + 3x^2 y$$
$$y'' = -9x^2 + 6xy + 3x^2 y'$$
$$y''' = -18x + 12xy' + 6y + 3x^2 y''$$
$$y^{(4)} = -18 + 18xy'' + 18y' + 3x^2 y'''$$
$$y(0)=1, y'(0)=1, \quad y''(0)=0, \quad y'''(0)=6, \quad y^{(4)}(0)=0$$
$$\Rightarrow y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}.0 + \frac{x^3}{3!}.6 + \frac{x^4}{4!}.0 + O(x^5)$$
$$= 1 + x + x^3 + O(x^5)$$
$$y(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad (٤-٧)$$

عند $x = 0.2$ تكون $y = 1.25000$ وذلك باستخدام حدود حتى x^6. ونلاحظ أن نصف قطر تقارب هذه المتسلسلة (radius of convergence of the series) يساوي 1 ، مما يعني أنه لا يمكن استخدام هذه المتسلسلة لحساب قيمة y عند $x = 1.2$.

الحل المضبوط هو : $y = \frac{1}{1-x} \quad , \quad x < 1$

(٨-٤ (i)

$$y(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt$$

$$y'(x) = e^{-x^2}.1.e^{x^2} + \int_0^x e^{t^2}dt.\left(-2xe^{-x^2}\right)$$

$$= 1 - 2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt$$

$$= 1 - 2xy.$$

$$y(0) = e^{-0}\int_0^0 e^{t^2}dt = 0$$

(ii)

$y' = 1 - 2xy$	$y'_0 = 1$
$y'' = -2(xy' + y)$	$y''_0 = 0$
$y''' = -2(xy'' + 2y')$	$y'''_0 = -4$
$y^{(4)} = -2(xy''' + 3y'')$	$y_0^{(4)} = 0$
$y^{(5)} = -2\left(xy^{(4)} + 4y'''\right)$	$y_0^{(5)} = 32$

$$\text{Taylor}: \quad y_1 = y_0 + hy'_0 + \frac{h^2}{2!}y''_0 + \cdots + \frac{h^5}{5!}y_0^{(5)}$$

$$= 0.5 - 4 * \frac{0.135}{6} + 32 * \frac{0.5^5}{120} = 0.425$$

(iii)

Error = |0.425 – 0.4244364| = 0.0005636

أي أن الجواب صحيح لرقمين عشريين.

(٩-٤ $y' = t^2 - y, \quad y'' = -t^2 + 2t + y, \quad y''' = t^2 - 2t + 2 - y$

$y^{(4)} = -t^2 + 2t - 2 + y$; y(0) = 1. Taylor's solutions:

t_k	y_k			Exact $y(t_k)$
	h=0.2	h=0.1	h=0.05	
0.05			0.9512706	0.9512706
0.1		0.9051625	0.9051626	0.9051626
0.15			0.8617920	0.8617920
0.2	0.8212667	0.8212691	0.8212692	0.8212692
1.0	0.6321148	0.6321202	0.6321205	0.6321206
2.0	1.8646605	1.8646645	1.8646647	1.8646647

$$y' = -ty\,, \quad y'' = t^2y - y\,, \quad y''' = -t^3y + 3ty \quad (١١-٤$$

$$y^{(4)} = t^4y - 6t^2y + 3y\,; \quad y(0) = 1. \quad \text{Taylor solutions:}$$

t_k	y_k			Exact $y(t_k)$
	h=0.2	h=0.1	h=0.05	
0.05			0.9987508	0.9987508
0.1		0.9950125	0.9950125	0.9950125
0.15			0.9888131	0.9888130
0.2	0.9802	0.9801988	0.9801987	0.9801987
1.0	0.6065735	0.6065333	0.6065308	0.6065307
2.0	0.1353374	0.1353354	0.1353353	0.1353353

٤-١٤) عند تطبيق طريقة ريتشاردسون لتحسين الحل بطريقة تايلور لمسألة القيمة الابتدائية

$$y' = \frac{t-y}{2}\ ; \quad t \in [0,3]\ , \quad y(0) = 1$$

نحصل على الجدول التالي حيث عناصر الجدول هي تقريبات y(3).

h	y_h	$[16y_h - y_{2h}]/15$
1	1.6701860	
1/2	1.6694308	1.6693805
1/4	1.6693928	1.6693903
1/8	1.6693906	1.6693905

أجوبة تمرينات رقم (٥)

٥-١-أ)

$$y = y_1 + E_1$$
$$y = y_2 + E_2 \quad ; \quad E \alpha h^4$$

نفرض $h_2 = h_1 / 2$

$$\Rightarrow E_2 = \frac{1}{16} E_1$$
$$y = y_1 + E_1$$
$$16\, y = 16\, y_2 + E_1$$
$$\Rightarrow \quad 15y = 16y_2 - y_1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{16y_2 - y_1}{15}$$
$$y = y_1 + k\, h_1^5 \cdot \frac{x_j - x_i}{h_1}$$

وبأخذ $x_j - x_i = h_1$

$$\ell te = kh_1^5 = E_1 = y - y_1 = \frac{16y_2 - y_1}{15} - y_1$$
$$= \frac{16}{15}(y_2 - y_1)$$

ب) أولا : $h = 0.1$

$f_1 = 2$
$f_2 = 1 + (1 + 0.1/2 * 2)^2 = 2.21$
$f_3 = 1 + (1 + 0.1/2 * 2.21)^2 = 2.23321$
$f_4 = 1 + (1 + 0.1 * 2.23321)^2 = 2.496514$

$y_1 = 1 + 2.230489 * 0.1 = 1.2230489$

للحصول على y_2 :

$x_1 = 0.1$
$f_1 = 2.49585$
$f_2 = 2.81668$
$f_3 = 2.86018$
$f_4 = 3.27728$

$y_2 = 1.50849616$

ثانيا : $h = 0.2$

$f_1 = 2$
$f_2 = 1 + (1 + 0.2/2 * 2)^2 = 2.44$
$f_3 = 2.54754$
$f_4 = 3.27861$

$y_1 = 1.50845613$

Exact y(0.2) = 1.50849765
Actual error at x = 0.2 (with h = 0.1) = 149×10^{-8}
Actual error at x = 0.2 (with h = 0.2) = 4152×10^{-8}

$$\ell te\big|_{\text{Richardson}} = \frac{16}{15}(1.50849616 - 1.50845613)$$
$$= 4269.8663 \times 10^{-8}$$

أي أن الخطأ في النتيجة التي نحصل عليها بطريقة ريتشاردسون يساوي تقريبا الخطأ الفعلي عندما يكون طول الخطوة $h = 0.2$.

٥-٢-أ)

$y' = f(x , y) = \lambda y$
$f_1 = f(x_k , y_k) = \lambda y_k$
$f_2 = f(x_k + \frac{1}{2}h , y_k + \frac{1}{2}h\ f_1) = \lambda(y_k + \frac{1}{2}h\,\lambda y_k)$
$= \lambda\ y_k\ (1 + \frac{1}{2}\lambda h)$
$f_3 = f(x_k + \frac{1}{2}h , y_k + \frac{1}{2}h\ f_2)$
$= \lambda\ [y_k + \frac{1}{2}\lambda h\ \{\lambda y_k\ (1 + \frac{1}{2}\lambda h)\}]$
$= \lambda\ y_k\ [1 + \frac{1}{2}\lambda h + \frac{1}{4}\lambda^2 h^2]$
$f_4 = f(x_k + h , y_k + h\ f_3)$
$= \lambda\ (y_k + h\,\lambda\ y_k\ [1 + \frac{1}{2}\lambda h + \frac{1}{4}\lambda^2 h^2])$
$= \lambda\ y_k\ [1 + \lambda h + \frac{1}{2}(\lambda h)^2 + \frac{1}{4}(\lambda h)^3]$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}[f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4]$$

$$\frac{y_{k+1}}{y_k} = 1 + \frac{\lambda h}{6}[1 + 2 + \lambda h + 2 + \lambda h + \frac{1}{2}\lambda^2 h^2 +$$

$$1 + \lambda h + \frac{1}{2}(\lambda h)^2 + \frac{1}{4}(\lambda h)^3]$$

$$= 1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2} + \frac{(\lambda h)^3}{6} + \frac{(\lambda h)^4}{24}$$

$$= e^{\lambda h} - \left[\frac{(\lambda h)^5}{5!} + \frac{(\lambda h)^6}{6!} + \cdots\right]$$

$$= e^{\lambda h} + O\left((\lambda h)^5\right)$$

وهو المطلوب

(ب)

$$\lambda = 1 , \qquad h = 1 , \qquad \lambda h = -1$$

$$\frac{y_{k+1}}{y_k} = 1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2} + \frac{(\lambda h)^3}{6} + \frac{(\lambda h)^4}{24}$$

$$= 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{3}{8} < 1 \quad \Rightarrow \text{ stable.}$$

(٥-٣-أ)

$$y_n = \left(1 - h + \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24}\right)^n$$

(ب)

$h = 0.2 \Rightarrow$

$$y_1 = 1 - 0.2 + \frac{0.2^2}{2} - \frac{0.2^3}{6} + \frac{0.2^4}{24}$$

$$= 0.8187333$$

$h = 0.05 \Rightarrow$

$$y_1 = 1 - 0.05 + \frac{0.05^2}{2} - \frac{0.05^3}{6} + \frac{0.05^4}{24}$$

$$= 0.9512295$$

$$y_4 = y_1^4 = 0.8187312$$

Exact: $\frac{dy}{y} = -dx \quad \Rightarrow \quad \ln y = -x + c \quad \Rightarrow$

$$y = Ae^{-x} \quad \Rightarrow \quad y = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad y(0.2) = 0.8187309$$

$E_1 = 24 \times 10^{-7}$, $E_2 = 3 \times 10^{-7}$,

i.e. $E\downarrow$ as $h\downarrow$ $\Rightarrow$ convergent.

(٥-٤-أ

$y' = f(x,y) = y$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4)$$

$$f_1 = y_k$$

$$f_2 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} y_k\right) = y_k \left(1 + \frac{h}{2}\right)$$

$$f_3 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}\left(y_k + \frac{h}{2} y_k\right)\right)$$

$$= y_k \left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4}\right)$$

$$f_4 = f\left(x_k + h, y_k + h\, y_k \left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4}\right)\right)$$

$$= y_k \left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\left[y_k + 2y_k\left(1 + \frac{h}{2}\right) + 2y_k\left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4}\right) + y_k\left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{4}\right)\right]$$

$$= y_k\left[1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24}\right]$$

وبفرض أن

$$A(h)=\left[1+h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6}+\frac{h^4}{24}\right]$$

فيكون

$$y_{k+1}=A(h).y_k \quad \Rightarrow \quad y_n=[A(h)]^n y_0\,,$$

$$y_0=1 \quad \Rightarrow \quad y_n=[A(h)]^n$$

$$\Rightarrow \quad A(h)=1+h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6}+\frac{h^4}{24}$$

ب)

$h = 0.1 \Rightarrow$

$$y_1=A(h)=A(0.1)=1+0.1+\frac{(0.1)^2}{2}+\frac{(0.1)^3}{6}+\frac{(0.1)^4}{24}$$

$$=1.105170833$$

$E_{truncation} = | y_1 - y(0.1) | = | y_1 - e^{0.1} |$

$= | 1.105170833 - 1.1051709 | = 6.7 \times 10^{-8}$

$y_3 = [A(h)]^3 = [A(0.1)]^3 = (1.105170833)^3 = 1.3498585$

$E_{truncation} = | y_3 - y(0.3) | = | y_3 - e^{0.3} |$

$= |1.3498585 - 1.3498588 | = 3 \times 10^{-7}$

٥-٥)

$$y' = t^2 - y \;; \qquad y(0) = 1.$$

t_k	y_k			Exact $y(t_k)$
	h=0.2	h=0.1	h = 0.05	
0.05			0.9512706	0.9512706
0.1		0.9051627	0.9051626	0.9051626
0.15			0.8617920	0.8617920
0.2	0.8212733	0.8212695	0.8212693	0.8212692
1.0	0.6321380	0.6321216	0.6321206	0.6321206
2.0	1.8646923	1.8646664	1.8646648	1.8646647

٥-٧)

$$y' = - ty ; \qquad y(0) = 1.$$

t_k	y_k			Exact $y(t_k)$
	h=0.2	h=0.1	h = 0.05	
0.05			0.9987508	0.9987508
0.1		0.9950125	0.9950125	0.9950125
0.15			0.9888130	0.9888130
0.2	0.9801987	0.9801987	0.9801987	0.9801987
1.0	0.6065314	0.6065307	0.6065307	0.6065307
2.0	0.1353590	0.1353366	0.1353354	0.1353353

(٥-١٠

$$y' = 0.01(70 - y)\,(50 - y) ; \ t \in [0 , 20] , \ y(0) = 0.$$

t_k	v_k
0.50	13.45109
1.00	21.82776
2.00	31.62582
3.00	37.10403
4.00	40.54658
5.00	42.87100
10.00	47.85965
20.00	49.73487

أجوبة تمرينات رقم ٦

(٦-١

starting values: $y_1 = 0.905$, $y_2 = 0.8190$, $y_3 = 0.7412$

Predictor : $y_4 = y_0 + \frac{4h}{3}(-2y_1 + y_2 - 2y_3)$

$= 0.6703276$

Corrector : $y_4 = y_2 + \frac{h}{3}(-y_2 - 4y_3 - y_4)$

$= 0.6703088$

أي أن قيمة y عند $x = 0.4$ تساوي 0.670 لثلاثة أرقام عشرية.

$$y_{exact} = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad y(0.4) = e^{-0.4} = 0.6703$$

$$y_4\big|_{Taylor} = 0.6708 \quad \Rightarrow \quad Error\big|_{Taylor} = 0.0005 \approx 0.001$$

$Error\big|_{P-C} = 0.000 \Rightarrow$ طريقة ميلن – سمبسون للتقدير والتصحيح أفضل

(٦-٢

y(-0.2) = 1 – 0.2 – 0.008 = 0.792
y(-0.1) = 1 – 0.1 – 0.001 = 0.899
y(0.1) = 1 + 0.1 + 0.001 = 1.101
y(0.2) = 1 + 0.2 + 0.008 = 1.208

نفرض أن $x_0 = 0$. وبالتالي يكون المطلوب حساب قيمة y_3.

$$y_3^{(P)} = y_{-1} + \frac{0.4}{3}(2y'_0 - y'_1 + 2y'_2)$$

$$y_3^{(C)} = y_1 + \frac{0.1}{3}(y'_1 + 4y'_2 + y'_3)$$

$$y'_1 = y'(0.1) = 1 - 0.003 + 0.03 * 1.101 = 1.03003$$

$$y'_2 = y'(0.2) = 1 - 0.024 + 0.12 * 1.208 = 1.12096$$

$$y_3^{(P)} = 0.899 + \frac{0.4}{3}(2 - 1.03003 + 2.24192) = 1.327252$$

$$y'_3 \equiv \left(y_3^{(P)}\right)' \equiv y'_p(0.3) = 1 - 3*0.3^3 + 3*0.3^2 *1.327252$$
$$= 1.277358$$
$$y_3^{(C)} = 1.101 + \frac{0.1}{3}(1.03003 + 4*1.12096 + 1.277358)$$
$$= 1.3273742$$
$$\left|y_3^{(C)} - y_3^{(P)}\right| = 0.0001222 = 0.1222*10^{-3} < 0.5*10^{-3}$$
$$\Rightarrow \quad y_3 = 1.3273742 \quad \text{correct to 3d}$$

أي أن $y_3 = 1.33$ لرقمين عشريين.

٦-٣) (أ) $y(0)=1, \quad y' = x - y, \quad y'_0 = 0 - 1 = -1$

$$y'_1 = x_1 - y_1$$

P : $y_{i+1} = y_i + 0.1y'_i = y_i + 0.1(x_i - y_i)$

C : $y_{i+1} = y_i + \frac{0.1}{2}[y'_i + y'_{i+1}]$

$$= y_i + \frac{0.1}{2}[x_i - y_i + x_{i+1} + y_{i+1}]$$

فمثلا بوضع $i = 0$ نحصل على قيمتي y_1 (المقدرة والمصححة) التاليتين:

P: $y_1 = y_0 + 0.1(x_0 - y_0) = 1 + 0.1(0 - 1) = 0.9$

C: $y_1 = 1 + \frac{0.1}{2}(0 - 1 + 0.1 - 0.9) = 0.91$

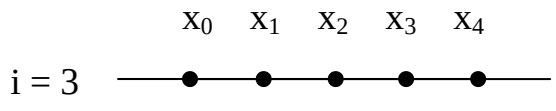
وبالمثل يمكن الحصول على باقي قيم y المقدرة والمصححة والتي نبينها في الجدول التالي:

	x = 0.1	0.2	0.3
P:	0.9000	0.8286	0.7735
C:	0.9100	0.8376	0.7817
	0.9095	0.8371	0.7813
	0.9095	0.8372	0.7813
		0.8372	

(ب)

P: $y_{i+1} = y_{i-3} + \frac{0.4}{3}\left[2y'_i - y'_{i-1} + 2y'_{i-2}\right]$

C: $y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{0.1}{3}\left[y'_{i+1} + 4y'_i + y'_{i-1}\right]$



X=0.4

0.740660137

0.740261

0.74027

(ج)

	x = 0.1	0.2	0.3	0.4
Exact y	0.9097	0.8375	0.7816	0.7406
Error	0.0002	0.0003	0.0003	0.0003

٦-٤) (أ)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(y'_{i+1} + y'_i\right) = y_i + \frac{h}{2}\left(-y_{i+1} - y_i\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y_{i+1}}{y_i} = \frac{1-\frac{h}{2}}{1+\frac{h}{2}} < 1 \quad \text{(دائما)} \quad \Rightarrow \quad \text{مستقرة دائما}$$

(ب) نفرض $h = 1$ ، فيكون المطلوب إيجاد قيمة y_2 . (لاحظ أن $x_0 = -1$)

Predictor: $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(3y'_i - y'_{i-1}\right) = y_i + \frac{1}{2}\left(-3y_i + y_{i-1}\right)$

$$= -\frac{1}{2}\left(y_i + y_{i-1}\right)$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Predictor:} & y_2 = -\frac{1}{2}(y_1 - y_0) \\ \text{Corrector:} & y_2 = y_1 + \frac{1}{2}(-y_2 - y_1) = \frac{1}{2}(y_1 - y_2)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

نحتاج لحساب قيمة y_1 بطريقة RK ، علماً بأن $x_0 = -1, y_0 = 1$

$$k_1 = -1, \quad k_2 = -\frac{1}{2}, \quad k_3 = -\frac{3}{4}, \quad k_4 = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = 3/8 = 0.375$$

$$\text{Predictor:} \qquad y_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{8} - 1\right) = \frac{5}{16} = 0.3125$$

$$\text{Corrector:} \qquad y_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8} - \frac{5}{16}\right) = \frac{1}{32} = 0.03125$$

$$y_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{32}\right) = \frac{11}{64} = 0.171875$$

$$y_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8} - \frac{11}{64}\right) = \frac{13}{128} = 0.1015625$$

$$y_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8} - \frac{13}{128}\right) = \frac{35}{256} = 0.1367187$$

الفارق بين آخر قيمتين من قيم y_2 المصححة:

$$\text{difference} \approx 4 \times 10^{-2} = 0.4 \times 10^{-1} < 0.5 \times 10^{-1}$$

$\Rightarrow$ $y_2 = 0.1$ correct to 1 decimal

(٦-٥

$$y' = x - 0.1\,y^2$$

y	1.0406 8	1.0151 3	1	0.9950 7	1.0001 3	?
x	-0.2	-0.1 x_{-1}	0 x_0	0.1 x_1	0.2 x_2	0.3 x_3

بوضع i = 2 نحصل على:

Predictor:

$$y_3 = y_{-1} + \frac{0.4}{3}(2y'_0 - y'_1 + 2y'_2)$$

$$y'_0 = 0 - 0.1*1 = -0.1$$

$$y'_1 = 0.1 - 0.1*0.99507^2 = 0.00098354$$

$$y'_2 = 0.2 - 0.1*1.00013^2 = 0.099974$$

$$y_3 = 1.01513 + \frac{0.4}{3}\left(2*-0.1 - 0.00098354 + 2*0.099974\right)$$

$$= 1.014992$$

$$y'_3 = 0.3 - 0.1*1.014992^2 = 0.1969791$$

Corrector :

$$y_3 = y_1 + \frac{0.1}{3}\left(y'_1 + 4y'_2 + y'_3\right)$$

$$= 0.99507 + \frac{0.1}{3}\left(0.00098354 + 4*0.099974 + 0.1969791\right)$$

$$= 1.0149986$$

$$y_3^C - y_3^P = 0.0000066 < 0.5\times10^{-4}$$

$$\Rightarrow \text{To 4 decimals} \quad y_3 = 1.0150$$

وبالمقارنة مع الحل الذي نحصل عليه بطريقة أويلر نلاحظ أن الحل بطريقة أويلر يتفق مع هذا الحل (بطريقة التقدير والتصحيح) لرقم عشري واحد فقط.

$$y' = x - \frac{1}{y} \equiv f(x,y) \quad (٦-٦$$

Taylor: $$y_{i+1} = y_i + hy'_i + \frac{h^2}{2!}y''_i + \cdots$$

$$y' = x - \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad y'' = 1 + \frac{1}{y^2}.y'$$

للحصول على y_1 : ضع $i = 0$:

$$y'_0 = 0 - \frac{1}{1} = -1, \quad y''_0 = 1 + \frac{1}{1}*-1 = 0$$

P: $$y_1 = y_0 + hy'_0 + \frac{h^2}{2!}y''_0 + \cdots$$

$$= 1 + 0.1*-1 + 0 = 0.9$$

C: $$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(x_i - \frac{1}{y_i} + x_{i+1} - \frac{1}{y_{i+1}} \right)$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left(x_0 - \frac{1}{y_0} + x_1 - \frac{1}{y_1} \right)$$

$$= 1 + \frac{0.1}{2}\left(0 - 1 + 0.1 - \frac{1}{0.9}\right)$$

$$= 1 + 0.05\left(-0.9 - \frac{1}{0.9}\right) = 0.8994445$$

C: $$y_1 = 1 + 0.05\left(-0.9 - \frac{1}{0.8994445}\right) = 0.8994102$$

$\Rightarrow$ To 3d. $\boxed{y_1 = 0.899}$ $\equiv$ y at x = 0.1

للحصول على y_2 : ضع i = 1:

$$y_1' = x_1 - \frac{1}{y_1} = 0.1 - \frac{1}{0.8994102} = -1.0118397$$

$$y_1'' = 1 + y_1' / y_1^2 = 1 - 1.0118397 / (0.8994102)^2$$

$$= -0.2508233$$

P: $$y_2 = y_1 + 0.1y_1' + \frac{0.1^2}{2!} y_1''$$

$$= 0.8994102 - 0.1 * 1.0118397 + \frac{0.01}{2} * -0.2508233$$

$$= 0.796972$$

C: $$y_2 = y_1 + 0.05\left(x_1 - \frac{1}{y_1} + x_2 - \frac{1}{y_2} \right)$$

$$= 0.8994102 + 0.05(0.1 - 1/0.8994102 + 0.2 - 1/y_2)$$

$$= 0.8994102 + 0.05(-0.8118397 - 1/y_2)$$

$$= 0.7960807$$

C: $$y_2 = 0.8994102 + 0.05(-0.8118397 - 1/0.7960807)$$

$$= 0.7960105$$

$\Rightarrow$ To 3d. $\boxed{y_2 = 0.796}$ $\equiv$ y at x = 0.4

(٦-١٠)

$y' = t^2 - y; \quad y(0) = 1$

	y_k		
t_k	Adams-Bashforth-Moulton Solution	Milne Simpson Solution	Hamming's Solution
0.2	0.8212693	0.8212692	0.8212692
0.25	0.7836992	0.7836992	0.7836992
0.3	0.7491818	0.7491818	0.7491818
0.4	0.6896800	0.6896800	0.6896800
0.5	0.6434694	0.6434693	0.6434693

(٦-١٢)

$y' = -t/y \quad \text{with} \quad y(1) = 1$

	y_k		
t_k	Adams-Bashforth-Moulton Solution	Milne Simpson Solution	Hamming's Solution
1.2	0.7483205	0.7483273	0.7483296
1.25	0.6613998	0.6614224	0.6614250
1.3	0.5566583	0.5567251	0.5567253
1.35	0.4208572	0.4210904	0.4210644
1.4	0.1974740	0.1988783	0.1982560

(٦-١٤)

$y' = 2ty^2 \quad \text{with} \quad y(0) = 1$

	y_k		
t_k	Adams-Bashforth-Moulton Solution	Milne Simpson Solution	Hamming's Solution

0.2	1.0416675	1.0416670	1.0416668
0.25	1.0666688	1.0666673	1.0666671
0.3	1.0989052	1.0989025	1.0989020
0.4	1.1904878	1.1904801	1.1904788
0.5	1.3333631	1.3333439	1.3333404

(٦-١٦

$y' = 2y - y^2 ; \quad y(0) = 1$

	y_k		
t_k	Adams-Bashforth-Moulton Solution	Milne Simpson Solution	Hamming's Solution
0.2	1.1972300	1.1973754	1.1973753
0.25	1.2447770	1.2449187	1.2449186
0.3	1.2911748	1.2913127	1.2913126
0.4	1.3798202	1.3799491	1.3799489
0.5	1.4619988	1.4621172	1.4621170

(٦-١٨

$y' = y^2 \sin(t); \quad y(0) = 1$

	y_k		
t_k	Adams-Bashforth-Moulton Solution	Milne Simpson Solution	Hamming's Solution
0.2	1.0203389	1.0203389	1.0203388
0.25	1.0320852	1.0320850	1.0320850
0.3	1.0467519	1.0467517	1.0467516
0.4	1.0857051	1.0857046	1.0857045
0.5	1.1394953	1.1394943	1.1394941

أجوبة تمرينات رقم ٧

(٧-١

$$\frac{dx}{dt} = x + y + t = f(x,y,t), \quad x(1) = 0$$
$$\frac{dy}{dt} = 2x - t = g(x,y,t), \quad y(1) = 1$$
$$t_0 = 1, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad h = 0.1, \quad x_2 = ?$$
$$x_{i+1} = x_i + hf(x_i, y_i, t_i) = x_i + h(x_i + y_i + t_i)$$
$$y_{i+1} = y_i + hg(x_i, y_i, t_i) = y_i + h(2x_i - t_i)$$
$$x_1 = 0 + 0.1(2) = 0.2$$
$$y_1 = 1 + 0.1(0 - 1) = 0.9$$
$$x_2 = 0.2 + 0.1(0.2 + 0.9 + 1.1) = 0.42$$
$$y_2 = 0.9 + 0.1(0.4 - 1.1) = 0.83$$

(٧-٢

$$y' = -2z = f(x,y,z)$$
$$z' = y - x = g(x,y,z)$$
$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i, z_i) = y_i - 0.4\, z_i$$
$$z_{i+1} = z_i + hf_2(x_i, y_i, z_i) = z_i + 0.2(y_i - x_i)$$

x_i	0	0.2	0.4	0.6
y_i	1	1	0.92	0.776
z_i	0	0.2	0.36	

(٧-٥

t_k	Euler's Solution		Runge-Kutta Solution	
	x_k	y_k	x_k	y_k
0.00	-2.7000000	2.8000000	-2.7000000	2.8000000
0.05	-2.5500000	2.6700000	-2.5521092	2.6742492
0.10	-2.4040735	2.5485015	-2.4078422	2.5570240
0.15	-2.2613042	2.4355685	-2.2662276	2.4484383
0.20	-2.1206612	2.3313677	-2.1261657	2.3487177

0.25	-1.9809701	2.2361870	-1.9863951	2.2582202
0.30	-1.8408766	2.1504585	-1.8454540	2.1774612
0.35	-1.6988028	2.0747861	-1.7016310	2.1071446
0.40	-1.5528942	2.0099803	-1.5529068	2.0482011
0.45	-1.4009547	1.9570997	-1.3968823	2.0018347
0.50	-1.2403677	1.9175032	-1.2306913	1.9695802
0.55	-1.0679998	1.8929130	-1.0508942	1.9533731
0.60	-0.8800833	1.8854923	-0.8533475	1.9556353
0.65	-0.6720727	1.8979393	-0.6330458	1.9793801
0.70	-0.4384703	1.9336037	-0.3839279	2.0283406
0.75	-0.1726120	1.9966280	-0.0986403	2.1071260
0.80	0.1335929	2.0921202	0.2317506	2.2214137
0.85	0.4899800	2.2263660	0.6181117	2.3781833
0.90	0.9085186	2.4070863	1.0736725	2.5860022
0.95	1.4037862	2.6437537	1.6145507	2.8553759
1.00	1.9935477	2.9479775	2.2603937	3.1991747

(٩-٧

$$2x'' - 5x' - 3x = 45\ \exp(2t);$$
$$x(0) = 2, \quad x'(0) = 1.$$
$$x' = y, \quad y' = 1.5x + 2.5y + 22.5\ \exp(2t);$$

t_k	Euler's Solution		Runge-Kutta Order 4	
	x_k	y_k	x_k	y_k
0.05	2.05	2.4	2.0875384	2.5548149
0.1	2.17	4.0970673	2.2612983	4.4593080
0.2	2.6821548	8.6109876	2.9477416	9.6019238
0.3	3.6910454	15.1009428	4.2609483	17.1320033
0.4	5.4118562	24.3286106	6.4858063	28.0250579
0.5	8.1422522	37.3283984	10.0223747	43.6284511

أجوبة تمرينات رقم ٨

٨-٢)

tk	x_k
0.0	0.95
0.1	0.60878730
0.2	0.40271388
0.3	0.28465173
0.4	0.21949736
0.5	0.18169660
0.6	0.15343074
0.7	0.12322870
0.8	0.08483430
0.9	0.03621082
1.0	-0.02138964
1.1	-0.08432878
1.2	-0.14746376
1.3	-0.20499428
1.4	-0.25124697
1.5	-0.28136156
1.6	-0.29184300
1.7	-0.28094858
1.8	-0.24888884
1.9	-0.19783359
2.0	-0.13172934
2.1	-0.05594944
2.2	0.02318879
2.3	0.09899431
2.4	0.16500770
2.5	0.21558615
2.6	0.24641578
2.7	0.25490439
2.8	0.24042007
2.9	0.20435366
3.0	0.15

٨-٧)

tk	xk
1.0	1.0
1.2	1.0546381
1.4	1.0831232
1.6	1.0798710
1.8	1.0388296
2.0	0.9542127
2.2	0.8212266
2.4	0.6367661
2.6	0.4000418
2.8	0.1130972
3.0	-0.2188219
3.2	-0.5870815
3.4	-0.9796809
3.6	-1.3814962
3.8	-1.7747499
4.0	-2.1396926
4.2	-2.4554759
4.4	-2.7011783
4.6	-2.8569364
4.8	-2.9051254
5.0	-2.8315261
5.2	-2.6264119
5.4	-2.2854900
5.6	-1.8106358
5.8	-1.2103650
6.0	-0.5

أجوبة تمرينات رقم ٩

٩-٢)

t_k	x_k
0.0	0.95
0.1	0.5317266
0.2	0.2857011
0.3	0.1511952
0.4	0.0839456
0.5	0.0523099
0.6	0.0344961
0.7	0.0165091
0.8	-0.0094459
0.9	-0.0462800
1.0	-0.0931759
1.1	-0.1466461
1.2	-0.2015235
1.3	-0.2518848
1.4	-0.2918877
1.5	-0.3164939
1.6	-0.3220454
1.7	-0.3066663
1.8	-0.2704721
1.9	-0.2155770
2.0	-0.1459092
2.1	-0.0668545
2.2	0.0152348
2.3	0.0936205
2.4	0.1617937
2.5	0.2140701
2.6	0.2461103
2.7	0.2553193
2.8	0.2410884
2.9	0.2048586
3.0	0.15

٩-٧)

t_k	x_k
1.0	1.0
1.2	1.0567979
1.4	1.0872681
1.6	1.0857698
1.8	1.0461730
2.0	0.9626076
2.2	0.8302022
2.4	0.6457893
2.6	0.4085406
2.8	0.1204907
3.0	-0.2130896
3.2	-0.5835053
3.4	-0.9786586
3.6	-1.3832965
3.8	-1.7794839
4.0	-2.1472943
4.2	-2.4656913
4.4	-2.7135651
4.6	-2.8708760
4.8	-2.9198458
5.0	-2.8461364
5.2	-2.6399466
5.4	-2.2969609
5.6	-1.8190898
5.8	-1.2149440
6.0	-0.5

أجوبة التمرينات العامة

(١) (أ) نظرا لأن $\frac{dy}{dt} \equiv y' = f(t, y(t))$ فلذلك

$$\int_a^t \frac{dy}{d\tau}\, d\tau = \int_a^t f(\tau, y(\tau))\, d\tau$$

$$\Rightarrow \quad y(t) - y(a) = \int_a^t f(\tau, y(\tau))\, d\tau$$

وحيث أن $y(a) = y_0$ ، فلذلك

$$y(t) = y_0 = \int_a^t f(\tau, y(\tau))\, d\tau$$

وهذه معادلة تكاملية (integral equation) ، يمكن أن نستبدل بها الصيغة التكريرية (iterative formula) التالية (وهي الصيغة المطلوبة لطريقة بيكارد) للحصول على y كدالة في t:

$$y^{[k]}(t) = y_0 + \int_a^t f\left(\tau, y^{[k-1]}(\tau)\right) d\tau\,; \quad y^{[0]}(t) = y_0,$$

$$k = 1,2,3,...$$

ثم لحساب قيمة y (evaluate) عند أي نقطة $\bar{t}$ ، نعوض $t = \bar{t}$ في صيغة الدالة التي حصلنا عليها (دالة في t).

(ب)
$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \equiv f(x, y);$$

$$y(0) = 1\,; \quad \text{i.e.,} \quad x_0 = 0\,, \quad y_0 = 1\,.$$

$$y^{[0]}(x) = y_0 = 1$$

$$y^{[1]}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(x, y^{[0]}(x)\right)dx = 1 + \int_{0}^{x} f(x,1)\,dx$$

$$= 1 + \int_{0}^{x} f\left(x^2 + 1\right)dx = 1 + x + \frac{x^3}{3}$$

$$y^{[2]}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(x, y^{[1]}(x)\right)dx = 1 + \int_{0}^{x} f\left(x, 1 + x + \frac{x^3}{3}\right)dx$$

$$= 1 + \int_{0}^{x}\left[x^2 + \left(1 + x + \frac{x^3}{3}\right)^2\right]dx$$

$$= 1 + \int_{0}^{x}\left[x^2 + 1 + x^2 + \frac{x^6}{9} + 2x + 2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^4}{3}\right]dx$$

$$= 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{1}{63}x^7$$

(ج) الحل باستخدام مفكوك متسلسلة تايلور:

$$y' \equiv f = x^2 + y^2\,; \quad x_0 = 0\,, \quad y_0 = 1$$

$$y'(0) = 1$$

$$y'' \equiv f' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}.f = 2x + 2y\left(x^2 + y^2\right) \Rightarrow y''(0) = 2$$

$$y''' \equiv f'' = \frac{\partial f'}{\partial x} + \frac{\partial f'}{\partial y}.f' = 2 + 4xy + \left(2x^2 + 6y^2\right)\left(x^2 + y^2\right)$$

$$y^{(4)} \equiv \cdots\cdots \qquad \Rightarrow y'''(0) = 2 + 6 = 8$$

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + \frac{x^2}{2!}y''(0) + \frac{x^3}{3!}y'''(0)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!}.2 + \frac{x^3}{3!}.8 + \cdots$$

$$= 1 + x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \cdots$$

نلاحظ أن الحل بطريقة بيكارد يتفق مع هذه النتيجة بطريقة تايلور في الحدود الثلاثة الأولى. وإذا قمنا بإجراء تكريرات متتالية أكثر بطريقة

بيكارد ازداد عدد الحدود المتفقة ، فمثلا إذا قمنا بإجراء التكرير التالي $y^{[3]}(x)$ ، حصلنا على:

$$y^{[3]}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(x, y^{[2]}(x)\right)dx$$

$$= 1 + \int_{0}^{x} x^2 + \left(1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{3}{15}x^5 + \frac{1}{63}x^7\right)^2 dx$$

$$= 1 + x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \cdots$$

أي أن الحد الرابع أصبح أيضا من الحدود المتفقة.

(د) إذا أنهينا المتسلسلة (بطريقة بيكارد) بعد الحد الرابع ، وأردنا أن تقوم الحدودية الناتجة بتقريب y لأربعة أرقام عشرية فإننا نستخدم أول حد مهمل (first neglected term) (وهو الحد الخامس $\frac{1}{6}x^4$) كقيمة تقريبية لخطأ الاقتطاع (approximation of the truncation error) ، وبالتالي فإن

$$\left|\frac{1}{6}x^4\right| \le 0.00005$$

$$\Rightarrow \left|x^4\right| \le 0.0003$$

$$\Rightarrow |x| \le 0.1316$$

وبناءً عليه فإن الحدودية $1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3$ تمثل y صحيحة لأربعة أرقام عشرية في المدى

$$-0.1316 \le x \le 0.1316$$

(٢) (أ)

$$y^{[0]}(t) = 1$$

$$y^{[1]}(t) = 1 + \frac{1}{2}t^2$$

$$y^{[2]}(t)=1+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{6}t^3$$
$$y^{[2]}(t)=1+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{24}t^4$$

(ب)

$$y(t)=1+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{24}t^4-\frac{1}{120}t^5+\cdots$$

(٣) (ج) الحل الصحيح : $y(x)=2e^x+\sin(x)-\cos(x)$

وصيغ بيكارد التكريرية هي:

$$y^{[0]}(x)=1,$$
$$y^{[1]}(x)=1+x+2\sin(x)$$
$$y^{[2]}(x)=3+x+\frac{x^2}{2}+2\sin(x)-2\cos(x)$$
$$y^{[3]}(x)=3+3x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3-2\cos(x)$$

قارنها في حالة $x = 0$ مع y باستخدام مفكوك متسلسلة تايلور.

(٤) (أ) طريقة أويلر تعطي التقريبات التالية:

i	t_i	y_i	$y(t_i)$
1	1.1	0.271828	0.345920
5	1.5	3.18744	3.96767
6	1.6	4.62080	5.70296
9	1.9	11.7480	14.3231
10	2.0	15.3982	18.6831

(ب) الاستكمال الخطي يعطي التقريبات التالية:

t	التقريب	y(t)	الخطأ
1.04	0.108731	0.119986	0.01126

1.55	3.90412	4.78864	0.8845
1.97	14.3031	17.2793	2.976

(ج) $h < 0.00064$

(٥) (أ) طريقة تايلور من الرتبة الثانية تعطي النتائج المبينة بالجدول التالي:

t	t_i	y_i	$y(t_i)$
1	1.1	0.3397852	0.3459199
5	1.5	3.910985	3.967666
6	1.6	5.643081	5.720962
9	1.9	14.15268	14.32308
10	2.0	18.46999	18.68310

(ب) الاستكمال الخطي يعطي:

$y(1.04) \approx 0.\ 1359139$, $y(1.55) \approx 4.777033$, $y(1.97) \approx 17.17480$.

والقيم المضبوطة هي:

$y(1.04) = 0.1199875$, $y(1.55) = 4.788635$, $y(1.97) = 17.27930$.

(ج) طريقة تايلور من الرتبة الرابعة تعطي النتائج المبينة بالجدول التالي:

t	t_i	y_i
1	1.1	0.3459127
5	1.5	3.967603
6	1.6	5.720875
9	1.9	14.32290
10	2.0	18.68287

(د)

$y(1.04) \approx 0.1199704, y(1.55) \approx 4.788527, y(1.97) \approx 17.27904$.

(٦) (أ)

i	t_i	Order 2	Order 4
2	0.2	5.86595	5.86433
5	0.5	2.82145	2.81789
7	0.7	0.84926	0.84455
10	1.0	-2.08606	-2.09015

(ب) 0.8 s

(٧) (ii)

(أ) $1.0221167 \approx y(1.25) = 1.0219569, 1.1640347 \approx y(1.93) = 1.1643901$

(ب) $1.9086500 \approx y(2.1) = 1.9249616, 4.3105913 \approx y(2.75) = 4.3941697$

(ج) $-1.1461434 \approx y(1.3) = -1.1382768, -1.0454854 \approx y(1.93) = -1.0412665$

(د) $0.3271470 \approx y(0.54) = 0.3140018, 0.8967073 \approx y(0.94) = 0.8866318$

(٨) (ii)

(أ) $1.0227863 \approx y(1.25) = 1.0219569, 1.1649247 \approx y(1.93) = 1.1643901$

(ب) $1.9153749 \approx y(2.1) = 1.9249616, 4.3312939 \approx y(2.75) = 4.3941697$

(ج) $-1.1432070 \approx y(1.3) = -1.1382768, -1.0443743 \approx y(1.93) = -1.0412665$

(د) $0.3240839 \approx y(0.54) = 0.3140018, 0.8934152 \approx y(0.94) = 0.8866318$

(٩) (أ)

t	Runge-Kutta	y(t)
1.2	1.0149520	1.0149523
1.4	1.0475336	1.0475339
1.6	1.0884323	1.0884327

1.8	1.1336532	1.1336536
2.0	1.1812319	1.1812322

(ب)

t	Runge-Kutta	y(t)
1.4	0.4896842	0.4896817
1.8	1.1994320	1.1994386
2.2	2.2134693	2.2135018
2.6	3.6783790	3.6784753
3.0	5.8738386	5.8741000

(ج)

t	Runge-Kutta	y(t)
0.4	-1.6200576	-1.6200510
0.8	-1.3359824	-1.3359632
1.2	-1.1663735	-1.1663454
1.6	-1.0783582	-1.0783314
2.0	-1.0359922	-1.0359724

(د)

t	Runge-Kutta	y(t)
0.2	0.1627655	0.1626265

0.4	0.2052405	0.2051118
0.6	0.3766981	0.3765957
0.8	0.6461896	0.6461052
1.0	1.0023207	1.0022460

(١٠)

(أ)

i	t_i	y_i	h_i	$y(t_i)$
1	0.2093900	0.0298184	0.2093900	0.0298337
3	0.5610469	0.4016438	0.1777496	0.4016860
5	0.8387744	1.5894061	0.1280905	1.5894600
7	1.0000000	3.2190497	0.0486737	3.2190993

(ب)

i	t_i	y_i	h_i	$y(t_i)$
1	2.2500000	1.4499988	0.2500000	1.4500000
2	2.5000000	1.8333332	0.2500000	1.8333333
3	2.7500000	2.1785718	0.2500000	2.1785714
4	3.0000000	2.5000005	0.2500000	2.5000000

(ج)

i	t_i	y_i	h_i	$y(t_i)$
1	1.2500000	2.7789299	0.2500000	2.7789294
2	1.5000000	3.6081985	0.2500000	3.6081977
3	1.7500000	4.4793288	0.2500000	4.4793276
4	2.0000000	5.3862958	0.2500000	5.3862944

(د)

1	t_i	y_i	h_i	$y(t_i)$
1	0.2500000	1.3291478	0.2500000	1.3291498
2	0.5000000	1.7304857	0.2500000	1.7304898
3	0.7500000	2.0414669	0.2500000	2.0414720
4	1.0000000	2.1179750	0.2500000	2.1179795

(١١)

(أ)

t	y	y(t)
1.2	1.0149520	1.0149523
1.4	1.0477278	1.0475339
1.6	1.0887567	1.0884327
1.8	1.134009	1.133653

	3	6
2.0	1.1815967	1.1812322

(ب)

t	y	y(t)
1.4	0.4896842	0.4896817
1.8	1.1990422	1.1994386
2.2	2.2117448	2.2135018
2.6	3.6733266	3.6784753
3.0	5.8589944	5.8741000

(ج)

t	y	y(t)
0.5	-1.5379372	-1.5378828
1.0	-1.2383734	-1.2384058
1.5	-1.0947925	-1.0948517
2.0	-1.0359497	-1.0359724

(د)

t	y	y(t)
0.2	0.1627655	0.1626265
0.4	0.206605	0.205111

	7	8
0.6	0.3787680	0.3765957
0.8	0.6487176	0.6461052
1.0	1.0064121	1.0022460

(١٢)

(أ)

t	y	y(t)
1.2	1.0149520	1.0149523
1.4	1.0475227	1.0475339
1.6	1.0884141	1.0884327
1.8	1.1336331	1.1336536
2.0	1.1812112	1.1812322

(ب)

t	y	y(t)
1.4	0.4896842	0.4896817
1.8	1.1994245	1.1994386
2.2	2.2134701	2.2135018
2.6	3.6784144	3.6784753
3.0	58739518	5.8741000

(ج)

t	y	y(t)
0.5	-1.5378788	-1.5378828
1.0	-1.2384134	-1.2384058
1.5	-1.0948609	-1.0948517
2.0	-1.0359757	-1.0359724

(د)

t	y	y(t)
0.2	0.1627655	0.1626265
0.4	0.2048557	0.2051118
0.6	0.3762804	0.3765957
0.8	0.6458949	0.6461052
1.0	1.0021372	1.0022460

(١٣)

(أ)

k	t_k	y_k
10	0.1	1.317218
20	0.2	1.784511

(ب) طريقة نيوتن ستقلل عدد التكريرات في الخطوة الواحدة من ثلاثة إلى اثنين ، وذلك باستخدام شرط الإيقاف (stopping criterion):

$$\left| y_k^{(i)} - y_k^{(i-1)} \right| \le 10^{-6}$$

(١٤)

(أ)

t_i	y_1	u_1	y_2	u_2
0.200	2.12036583	2.12500839	1.50699185	1.51158743
0.400	4.44122776	4.46511961	3.24224021	3.26598528
0.600	9.73913329	9.83235869	8.16341700	8.25629549
0.800	22.67655977	23.00263945	21.34352778	21.66887674
1.000	55.66118088	56.73748265	56.03050296	57.10536209

(ب)

t_i	y_1	u_1	y_2	u_2
0.500	0.95671390	0.95672798	-1.08381950	-1.08383310
1.000	1.30654440	1.30655930	-0.83295364	-0.83296776
1.500	1.34416716	1.34418117	-0.56980329	-0.56981634
2.000	1.14332436	1.14333672	-0.36936318	-0.36937457

(ج)

t_i	y_1	u_1	y_2	u_2	y_3	u_3
0.5	0.70787076	0.70828683	-1.24988663	-1.25056425	0.39884862	0.39815702
1.0	-0.33691753	-0.33650854	-3.01764179	-3.01945051	-0.29932294	-0.30116868
1.5	-2.41332734	-2.41345688	-5.40523279	-5.40844686	-0.92346873	-0.92675778
2.0	-5.89479008	-5.89590551	-8.70970537	-8.71450036	-1.32051165	-1.32544426

(د)

t_i	y_1	u_1	y_2	u_2	y_3	u_3
0.2	1.38165297	1.38165325	1.00800000	1.00800000	-0.61833075	-0.61833075
0.5	1.90753116	1.90753184	1.12500000	1.12500000	-0.09090565	-0.09090566
0.7	2.25503524	2.25503620	1.34300000	1.34000000	0.26343971	0.26343970
1.0	2.83211921	2.83212056	2.00000000	2.00000000	0.88212058	0.88212056

(١٥)

(أ)

t_i	y_1	$y(t_i)$
0.200	0.00015352	0.00015350

0.500	0.00743133	0.00743027
0.700	0.03300266	0.03299805
1.000	0.17134711	0.17132880

(ب)

t_i	y_1	$y(t_i)$
1.200	0.96152437	0.96152583
1.500	0.77796798	0.77797237
1.700	0.59373213	0.59373830
2.000	0.27258055	0.27258872

(ج)

t_i	y_1	$y(t_i)$
1.000	3.73186337	3.73170445
2.000	11.31462595	11.31452924
3.000	34.04548233	34.04517155

(د)

t_i	y_1	$y(t_i)$
1.200	0.27273759	0.27273791
1.500	1.08847933	1.08849259
1.700	2.04352376	2.04353642
2.000	4.36157310	4.36157780

(١٦) نفرض أن L هو ثابت ليبشتز للدالة ϕ.

$$u_{k+1} - v_{k+1} = u_k - v_k + h\left[\phi(t_k, u_k, h) - \phi(t_k, v_k, h)\right]$$

$$\Rightarrow \quad |u_{k+1} - v_{k+1}| \le (1 + hL)|u_k - v_k|$$

$$\le (1 + hL)^{k+1} |u_0 - v_0|$$

(١٧) (أ) خطأ الاقتطاع المحلي:

$$\tau_{k+1} = \frac{1}{4} h^3 y^{(4)}(\xi_k)$$

حيث $t_{k-2} < \xi_k < t_{k+1}$

(ب) الطريقة متسقة / متوائمة لكنها غير مستقرة وغير متقاربة.

(١٨) الطريقة غير مستقرة.

أسماء بعض الكتب والمراجع
Bibliography and References

فيما يلي قائمة بأسماء بعض الكتب والمراجع ، والقائمة مرتبة ترتيبا أبجديا بالنسبة لأسماء المؤلفين.

1. Aberth, Oliver (1988). Precise Numerical Analysis, Wm. C. Brown, Dubuque, la.

2. Aburdene, Maurice F. (1988). Computer Simulation of Dynamic Systems, Wm. C. Brown, Dubuque, la.

3. Acton, Forman S. (1970). Numerical Methods that Work, Harper & Row, New York,

4. Aho, Alfred V., John E. Hopcroft, and Jeffrey D. Ullman (1974). The Design and Analysis of Computer Algorithms, Addison-Wesley, Reading, Mass.

5. Al-Khafaji, Amir Wadi, and John R. Tooley (1986). Numerical Methods in Engineering Practice, Holt, Rinehart and Winston, New York.

6. Ascher, Uri M., Robert M. M. Mattheij, and Robert D. Russell (1988). Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.

7. Atkinson, Kendall E. (1985). Elementary Numerical Analysis, John Wiley, New York.

8. Atkinson, Kendall E. (1988). An Introduction to Numerical Analysis, 2nd ed., John Wiley, New York.

9. Atkinson, Laurence V., and P. J. Harley (1983). An Introduction to Numerical Methods with Pascal, Addison-Wesley, Reading, Mass.

10. Bailey, Paul B., Lawrence F. Shampine, and Paul E. Waltman (1968). Nonlinear Two Point Boundary Value Problems, Academic Press, New York.

11. Barnard, David T., and Robert G. Crawford (1982). Pascal Programming Problems and Applications, Reston, Reston, Va.

12. Bender, Carl M., and Steven A. Orszag (1978). Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers, McGraw-Hill, New York.

13. Bender, Edward A. (1978). An Introduction to Mathematical Modeling, John Wiley, New York.

14. Bennett, William Ralph (1976). Introduction to Computer Applications for Nonscience Students, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.

15. Bennett, William Ralph (1976). Scientific and Engineering Problem-Solving with the Computer, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.

16. Blum, E. K. (1972). Numerical Analysis and Computation: Theory and Practice, Addison-Wesley, Reading, Mass.

17. Borse, G. J. (1985). FORTRAN 77 and Numerical Methods for Engineers, Prindle, Weber & Schmidt, Boston, Mass.

18. Brainerd, Walter S., and Lawrence H. Landweber (1974). Theory of Computation, John Wiley, New York.

19. Braun, Martin, Courtney S. Coleman, and Donald A. Drew, eds. (1983). Differential Equation Models, Springer-Verlag, New York.

20. Burden, Richard L., and J. Douglas Faires (1997). Numerical Analysis, 6th ed., Prindle, Weber & Schmidt, Boston, Mass.

21. Carnahan, Brice, H. A. Luther, and James 0. Wilkes (1969). Applied Numerical Methods, John Wiley, New York.

22. Carroll, John M. (1987). Simulation Using Personal Computers, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.

23. Chapra, Steven C. (1985). Numerical Methods for Engineers: With Personal Computer Applications, McGraw-Hill, New York.

24. Cheney, Ward (1966). Introduction to Approximation Theory, McGraw-Hill, New York.

25. Cheney, Ward, and David Kincaid (1985). Numerical Mathematics and Computing, 2nd ed. Brooks/Cole, Monterey, Calif.

26. Coddington, Earl A., and Norman Levinson (1955). Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill, New York.

27. Constantinides, Alkis (1987). Applied Numerical Methods with Personal Computers, McGraw-Hill, New York.

28. Conte, S. D., and Carl de Boor (1980). Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach, McGraw-Hill, New York.

29. Dahiquist, Germund, and Ake Bjorck (1974). Numerical Methods, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.

30. 42. Danby, J. M. A. (1985). Computing Applications to Differential Equations: Modelling in the Physical and Social Sciences, Reston, Reston, Va.

31. Daniels, Richard W. (1978). An Introduction to Numerical Methods and Optimization Techniques, North-Holland, New York.

32. Davis, Philip J., and Philip Rabinowitz (1984). Methods of Numerical Integration, 2nd ed., Academic Press, New York.

33. Devaney, Robert L. (1990). Chaos, Fractals, and Dynamics: Computer Experiments in Mathematics, Addison-Wesley, Menlo Park, Calif.

34. Dew, P. M., and K. R. James (1983). Introduction to Numerical Computation in Pascal, Springer-Verlag, New York.

35. Dodes, Irving Allen (1978). Numerical Analysis for Computer Science, North-Holland, New York.

36. Dorn, William S., and Daniel D. McCracken (1972). Numerical Methods with Fortran IV Case Studies, John Wiley, New York.

37. Forsythe, George E., Michael A. Malcolm, and Cleve B. Moler (1977). Computer Methods for Mathematical Computations, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.

38. Fox, L., and D. F. Mayers (1968). Computing Methods for Scientists and Engineers, Clarendon Press, Oxford.

39. Gear, C. William (1971). Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.

40. Gerald, Curtis F., and Patrick O. Wheatley (1984). Applied Numerical Analysis, 3rd ed., Addison-Wesley, Reading, Mass.

41. Giordano, Frank R., and Maurice D. Weir (1985). A First Course in Mathematical Modeling, Brooks/Cole, Monterey, Calif.

42. Greenspan, Donald, and Vincenzo, Casulli (1988). Numerical Analysis for Applied Mathematics, Science and Engineering, Addison-Wesley, New York.

43. Grove, Wendell E. (1966). Brief Numerical Methods, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.

44. Guggenheimer, H. (1987). BASIC Mathematical Programs for Engineers and Scientists, Petrocelli Books, West Hempstead, N.Y.

45. Haberman, Richard (1977). Mathematical Models: Mechanical Vibrations, Population Dynamics, and Traffic Flow, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.

46. Hageman, Louis A., and David M. Young (1981). Applied Iterative Methods, Academic Press, New York.

47. Hamming, Richard W. (1971). Introduction to Applied Numerical Analysis, McGraw-Hill, New York.

48. Hamming, Richard W. (1973). Numerical Methods for Scientists and Engineers, 2nd ed., McGraw-Hill, New York.

49. Henrici, Peter (1964). Elements of Numerical Analysis, John Wiley, New York.

50. Hildebrand, Francis B. (1974). Introduction to Numerical Analysis, 2nd ed., McGraw-Hill, New York.

51. Hornbeck, Robert.W. (1975). Numerical Methods, Quantum, New York.

52. Householder, Alston S. (1953). Principles of Numerical Analysis, McGraw-Hill, New York.

53. Hultquist, Paul F. (1988). Numerical Methods for Engineers and Computer Scientists, Benjamin/Cummings, Menlo Park, Calif.

54. Isaacson, Eugene, and Herbert Bishop Keller (1966). Analysis of Numerical Methods, John Wiley, New York.

55. Jacobs, D., (1977). The State of the Art in Numerical Analysis, Academic Press, New York.

56. Jacques, Ian, and Colin Judd (1987). Numerical Analysis, Chapman and Hall, New York.

57. James, M. L., G. M. Smith, and J. C. Wolford, (1985). Applied Numerical Methods for Digital Computation, 3rd ed., Harper & Row, New York.

58. Jensen, Jens A., and John H. Rowland (1975). Methods of Computation: The Linear Space Approach to Numerical Analysis, Scott, Foresman, Glenview, III.

59. Johnson, Lee W., and R. Dean Riess (1982). Numerical Analysis, 2nd ed., Addison-Wesley, Reading, Mass.

60. Johnston, R. L. (1982). Numerical Methods: a Software Approach, John Wiley, New York.

61. Kahaner, David, Cleve Moler, and Stephen Nash (1989). Numerical Methods and Software, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.

62. Keller, Herbert Bishop (1976). Numerical Solution of Two Point Boundary Value Problems, SIAM, Philadelphia, Pa.

63. Kincaid, David, and Ward Cheney (1991). Numerical Analysis Mathematics of Scientific Computing, Brooks/Cole, Pacific Grove, Calif.

64. King, J. Thomas (1984). Introduction to Numerical Computation, McGraw-Hill, New York.

65. Klamkin, Murray S. (1987). Mathematical Modeling: Classroom Notes in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, Pa.

66. Knuth, Donald E. (1981). The Art of Computer Programming, Vol. 2, Seminumerical Algorithms, 2nd ed., Addison-Wesley, Reading, Mass.

67. Kreyszig, Erwin (1983). Advanced Engineering Mathematics, 5th ed., John Wiley, New York.

68. Kunz, Kaiser S. (1957). Numerical Analysis, McGraw-Hill, New York.

69. Lambert, J. D. (1973). Computational Methods in Ordinary Differential Equations, John Wiley, New York.

70. Lapidus, L., and J. H. Seinfeld (1971). Numerical Solution of Ordinary Differential Equations, Academic Press, New York.

71. Lindfield, G. R., and J. E. T. Penny (1989). Microcomputers in Numerical Analysis, Halsted Press, New York.

72. Lucas, William F., Fred S. Roberts, and Robert M. Thrall, eds. (1983). Discrete and System Models, Springer-Verlag, New York.

73. Maki, Daniel P., and Maynard Thompson (1973). Mathematical Models and Applications, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.

74. Marcus-Roberts, Helen, and Maynard Thompson, eds. (1983). Life Science Models, Springer-Veriag, New York.

75. Maron, Melvin J., and Robert J. Lopez (1991). Numerical Analysis: a Practical Approach, 3rd ed., Wadsworth, Belmont, Calif.

76. Mathews, John H. (1992). Numerical Methods for Mathematics, Science, and Engineering. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J.

77. McCalla, Thomas Richard (1967). Introduction to Numerical Methods and FORTRAN Programming, John Wiley, New York.

78. McCormick, John M., and Mario G. Salvadori (1964). Numerical Methods in FORTRAN, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.

79. Miller, Webb (1984). The Engineering of Numerical Software, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.

80. Miller, Webb (1987). A Software Tools Sampler, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.

81. Moore, Ramon E. (1966). Interval Analysis, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.

82. Morris, John Li. (1983). Computational Methods in Elementary Numerical Analysis, John Wiley, New York.

83. Moursund, David G., and Charles S. Duris (1967). Elementary Theory and Application of Numerical Analysis, McGraw-Hill, New York.

84. Murphy, J., D. Ridout, and Brigid McShane (1988). Numerical Analysis, Algorithms and Computation, Halsted Press, New York.

85. Noble, Ben (1967). Applications of Undergraduate Mathematics in Engineering, Macmillan, New York.

86. Nonweiler, T. R. F. (1984). Computational Mathematics: an Introduction to Numerical Approximation, Halsted Press, New York.

87. Oldknow, Adrian, and Derek Smith (1983). Learning Mathematics with Micros, Halsted Press, New York.

88. Olinick, Michael (1978). An Introduction to Mathematical Models in the Social and Life Sciences, Addison-Wesley, Reading, Mass.

89. O'Neil, Peter V. (1991). Advanced Engineering Mathematics, 3rd ed., Wadsworth, Belmont, Calif.

90. Ortega, James M. (1972). Numerical Analysis, Academic Press, New York.

91. Ortega, James M., and William G. Poole (1981). An Introduction to Numerical Methods for Differential Equations, Pitman, Marshfield, Mass.

92. Pearson, Carl E. (1986). Numerical. Methods in Engineering and Science, Van Nostrand Reinhold, New York.

93. Pennington, Ralph H. (1970). Introductory Computer Methods and Numerical Analysis, 2nd ed., Macmillan, New York.

94. Pettofrezzo, Anthony J. (1984). Introductory Numerical Analysis, Orange Publishers, Winter Park, Fla.

95. Phillips, G. M., and P. J. Taylor (1974). Theory and Applications of Numerical Analysis, Academic Press, New York.

96. Pizer, Stephen M. (1975). Numerical Computing and Mathematical Analysis, Science Research Associates, Chicago, III.

97. Pizer, Stephen M., with Victor L. Wallace (1983). To Compute Numerically: Concepts and Strategies, Little, Brown, Boston, Mass.

98. Pokorny, Comel K., and Curtis F. Gerald (1989). Computer Graphics: the Principles Behind the Art and Science, Franklin, Beedle & Associates, Irvine, Calif.

99. Powell, Michael James David (1981). Approximation Theory and Methods, Cambridge University Press, Cambridge, Mass.

100. Press, William H., Brian P. Flannery, Saul A. Teukolsky, and William T. Vetterling (1988). Numerical Recipes in C: the Art of Scientific Computing, Cambridge University Press, New York.

101. Press, William H., Brian P. Flannery, Saul A. Teukolsky, and William T. Vetterling (1989). Numerical Recipes in Pascal: the Art of Scientific Computing, Cambridge University Press, New York.

102. Press, William H., Brian P. Flannery, Saul A. Teukolsky, and William T. Vetterling (1986). Numerical Recipes: the Art of Scientific Computing, Cambridge University Press, New York.

103. Ralston, Anthony, and Philip Rabinowitz (1978). A First Course in Numerical Analysis, 2nd ed., McGraw-Hill, New York.

104. Ralston, Anthony, and Herbert S. Wilf (1960). Mathematical Methods for Digital Computers, John Wiley, New York.

105. Rice, John R. (1980). Mathematical Aspects of Scientific Software, Springer-Verlag, New York.

106. Rice, John Rischard (1983). Numerical Methods, Software and Analysis: IMSL Reference Edition, McGraw-Hill, New York.

107. Salvadori, Mario G., and Melvin L. Baron (1961). Numerical Methods in Engineering, 2nd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.

108. Sandefur, James T. (1990). Discrete Dynamical Systems: Theory and Applications, Oxford University Press, New York.

109. Scalzo, Frank, and Rowland Hughes (1977). A Computer Approach to Introductory College Mathematics, Mason/Charter, New York.

110. Scarborough, James B. (1966). Numerical Mathematical Analysis, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, Md.

111. Scheid, Francis (1968). Theory and Problems of Numerical Analysis, McGraw-Hill, New York.

112. Schwarz, Hans Rudolf, and J. Waldvogel (1989). Numerical Analysis: a Comprehensive Introduction, John Wiley, New York.

113. Scraton, R. E. (1984). Basic Numerical Methods: An Introduction to Numerical Mathematics on a Microcomputer, Edward Arnold, Baltimore, Md.

114. Sewell, Granville (1988). The Numerical Solution to Ordinary and Partial Differential Equations, Harcourt Brace Jovanovich, San Diego, Calif.

115. Shampine, Lawrence F., and Richard C. Allen (1973). Numerical Computing: an Introduction, Saunders, Philadelphia, Pa.

116. Shampine, Lawrence F., and M. K. Gordon (1975). Computer Solution of Ordinary Differential Equations: the Initial Value Problem, W. H. Freeman & Company Publishers, San Francisco, Calif.

117. Shoup, Terry E. (1979). A Practical Guide to Computer Methods for Engineers, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.

118. Shoup, Terry E. (1983). Numerical Methods for the Personal Computer, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.

119. Simmons, George F. (1972). Differential Equations: With Applications and Historical Notes, McGraw-Hill, New York.

120. Smith, W. Allen (1986). Elementary Numerical Analysis, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.

121. Stanton, Ralph G. (1961). Numerical Methods for Science and Engineering, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.

122. Stark, Peter A. (1970). Introduction to Numerical Methods, Macmillan, Toronto, Ontario.

123. Szidarovszky, Ferenec, and Sidney Yakowitz (1978). Principles and Procedures of Numerical Analysis, Plenum Press, New York,

124. Thompson, William J. (1984). Computing in Applied Science, John Wiley, New York.

125. Todd, John (1979). Basic Numerical Mathematics, Vol. 1: Numerical Analysis, Academic Press, New York.

126. Tompkins, Charles B., and Walter L. Wilson (1969). Elementary Numerical Analysis, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.

127. Tuma, Jan J. (1989). Handbook of Numerical Calculations in Engineering, McGraw-Hill, New York.

128. Turner, Peter R. (1989). Guide to Numerical Analysis, CRC Press, Boca Raton, Fla.

129. Vandergraft, James S. (1983). Introduction to Numerical Computations, Academic Press, New York.

130. Vanlwaarden, John L. (1985). Ordinary Differential Equations with Numerical Techniques, Harcourt Brace Jovanovich, San Diego, Calif.

131. Wendroff, Burton (1966). Theoretical Numerical Analysis, Academic Press, New York.

132. Wilkes, Maurice Vincent (1966). A Short Introduction to Numerical Analysis, Cambridge University Press, New York.

133. Yakowitz, Sidney, and Ferenec Szidarovszky (1989). An Introduction to Numerical Computations, 2nd ed., Macmillan, New York.

134. Young, David M., and Robert Todd Gregory (1972). A Survey of Numerical Mathematics, Vols. I and 2, Addison-Wesley, Reading, Mass.

دليل المصطلحات العربية والإنجليزية
Index

فيما يلي قائمة بالمصطلحات الإنجليزية مرتبة ترتيبا أبجديا ، والمصطلحات العربية المقابلة لها ، مع أرقام الصفحات التي ظهرت فيها هذه المصطلحات.

المصطلح الإنجليزي	الصفحة	المصلح العربي
a priori step size	١٠٦	حجم خطوة افتراضي / محدد سابقا
absolute error	١١٣	الخطأ المطلق
accumulated error	٢٦	الخطأ المتراكم
accumulation factor	١١٢	معامل التراكم
accumulation of errors	٣١	تراكم الأخطاء
accumulation of l.t.errors	٣٣	تراكم أخطاء الاقتطاع المحلي
accuracy	٤٠	الدقة
actual error	١١٨	الخطأ الفعلي
Adams-Bashforth four-step method	١٢٥	طريقة آدمز – باشفورث رباعية الخطوة
Adams-Bashforth-Moulton method	١٣٠	طريقة آدمز – باشفورث – مولتن
agreement	١٠٣	اتفاق
algebraic expression	٥٥	تعبير جبري
algorithm	١٥	خوارزمية
amplification factor	١١٢	معامل التكبير
amplified (error)	١١٢	يُكبَّر (الخطأ)
analytic solution	٨	حل تحليلي
approximate	٨	يقرِّب
approximation points	٩	النقاط التقريبية
arithmetic operations	١٠٨	عمليات حسابية

associated truncation error	٨٥	خطأ الاقتطاع المصاحب
asymptote	٧٧	خط تقاربي
asymptotically stable	١٧٣	مستقر تقاربيا
attenuate the oscillations	١٤٠	يضعف / يخمد التذبذبات
average derivative	٨٢	القيمة المتوسطة للمشتقة
behaviour of the error	٥٥	سلوك الخطأ
bound	١٠٩	حد
boundary condition	١٦٥	شرط حَدِّي
boundary value	١٧٧	قيمة حدية
boundary value problem (bvp)	٩ ، ١٧٧	مسألة القيمة الحدية
bounded function	٣٤	دالة محدودة
bvp (boundary value problem)	١٧٧	مسألة القيمة الحدية
calculated solution	١١١	الحل المحسوب
calculated value	٣١	القيمة المحسوبة
central difference formulas	١٨٩	صيغ الفروق المركزية
characteristic polynomial	١٢٨	حدودية مميزة
circle	١٢	دائرة
classify	١٧٣	يصنِّف
closed form	١٥	صيغة / صورة مغلقة
closed form solution	٢٢	الصيغة المغلقة للحل
closed path	١٧٢	مسار مغلق
closely spaced values	٩	قيم متقاربة فيما بينها
coefficient matrix	٢٠٠	مصفوفة المعاملات
coefficients	١٧٢	المعاملات
combination	١٧٩	توافق
common point	١٦٤	نقطة مشتركة
community	٤٥	مجتمع سكاني
compare answers	١٠٣	يقارن الحلول

complicated	٨	معقد
computer simulaiton	١٧٢	المحاكاة بالحاسوب
computing time	١٠٨	وقت الحساب
concentration	١٢١	تركيز
consistency	١٢٨	تآلف / اتساق / تواؤم
constant of integration	٢	ثابت التكامل
contact	٤٥	اتصال / احتكاك
continuous function	٣٤	دالة متصلة
control tolerance	١٠٥	يتحكم في التفاوت
convenient	٨	مناسب / ملائم / ميسَّر
convergence	٤١	تقارب
convergent	١٢٨،١٠٩،٣٧	متقارب / تقاربي
corollary	٣٥	نتيجة
correct decimals	٧٤	الأرقام العشرية الصحيحة
correction	٤٨	تصحيح
correction formula	١٢٥	صيغة التصحيح
corrector	١٢٧	(معادلة) التصحيح
cover a range	٩	يغطي مدى / منطقة
criterion	١١٣	مقياس / معيار
critical point	١٧٥	نقطة حرجة
current step size	١٠٤	حجم الخطوة الحالي
damping of oscillations	١٥٩	تضاؤل الذبذبات
Dawson’s integral	٧٣	تكامل دوسن
DE (Differential Equation)	١	معادلة تفاضلية
decimals	٧٤	الأرقام العشرية
decreasing error	١٣٨	خطأ متناقص
definite integral	١٢٣	تكامل محدود
degree of freedom	٣	درجة الحرية
dependent variable	١	متغير تابع

derivation	٨٦	استنتاج / إثبات
derivative	١	مشتقة
derivative evaluations	١٠٨	حساب قيم المشتقات
derivative operator	٦٤	مؤثر الاشتقاق
derivative predictor	٤٨	تقدير أولي تفاضلي
diagonal dominance	٢٠٠	السيطرة القطرية
diagonally dominant	٢٠١	مسيطر قطريا
die out (error)	١١٢	يتلاشى (الخطأ)
difference equation	١٩ ، ١٢٩	معادلة فروق
difference method	٢٤	طريقة الفروق
difference quotient approximations for derivatives	١٨٩	تقريب المشتقات بفروق مقسومة
differentiable function	٥	دالة قابلة للتفاضل
diminish (error)	١١٢	يتناقص (الخطأ)
direct calculation	٨	حساب مباشر
direction field	٥	حقل الاتجاهات
directly proportional	٣	متناسب تناسبا طرديا
discrete points	٢٤	نقاط منفصلة / متباعدة
discrete variable method	٢٤	طريقة المتغيرات المتقطعة / المنفصلة
discretization error	٢٤	خطأ الاقتطاع
displacement	٥	إزاحة
dominate	١٠٧	يحكم / يغلب / يسيطر على
efficiency	١٣٢	كفاءة
electrical circuit	١٧١	دائرة كهربية
elementary single-step method	٢٤	طريقة بسيطة أحادية الخطوة
endpoint	١٠٦	نقطة النهاية
epidemic	٤٥	عدوى

equation of motion	١٧١	معادلة الحركة
equivalent	١٠	مكافئ
equivalent system	١٠،١٦١	نظام مكافئ
erroneous	١١٠	خاطئ
error	١٥	خطأ
error analysis	١٥	تحليل الأخطاء
error control	١١٦	التحكم في الخطأ
error estimate	١٣٢	تقدير الخطأ
error term	٤٩	حد الخطأ
estimate	١٠٢	يُقدِّر
estimation of the error	٨٢	تقدير الخطأ
Euler's approximation	١٥	تقريب أويلر
Euler's Method	١٥	طريقة أويلر
exact solution	١٦	الحل المضبوط / الصحيح / الدقيق
exact value	١٩	القيمة المضبوطة
exhibit instability	١١٠	يظهر عدم استقرار
existence and uniqueness of solution	٧	وجود حل وحيد
expansion	١٧	فك / مفكوك
explicit formula	٣	صيغة صريحة
explicit one-step method	١٢٩	طريقة صريحة أحادية الخطوة
exponential term	١١٠	حد أُسِّي
external force	١٥٩	قوة خارجية
extrapolation	٤٠	الاستيفاء
factor	٧٦	معامل
family of curves	٢	عائلة منحنيات
FGE (final global error)	٢٦	الخطأ الشامل النهائي
final approximation	٨٣	التقريب النهائي

final global error (FGE)	٢٦	الخطأ الشامل النهائي
fine tuning	١٣٣	تعديل دقيق
finite difference	١٨٩	فرق محدود
finite difference method	١٨٩	طريقة الفرق المحدود
finite memory	٢٥	ذاكرة محدودة
finite precision	٢٥	دقة محدودة
first approximation	٨٣	التقريب الأولي
first-order	١٠	من الرتبة الأولى
first-order equation	٩٢	معادلة أحادية الرتبة
fitting	٥	ملاءمة
fixed	٢٥	ثابت
fixed step size	١٠٥	حجم خطوة ثابت
formula	١٥	صيغة
foxes	١٧١	الثعالب
friction	١٧١	احتكاك
function	٢	دالة
general solution	١٨٥	حل عام
general step	٤٨	الخطوة العامة
generate	١٦	يولِّد
geometric interpretation	٥	التفسير الهندسي
Gill	٩٢	" جِل "
global discretization error	٢٥	خطأ الاقتطاع الشامل
grid of points	٢٤	شبكة نقاط
grow rapidly	١١١	ينمو ويكبر بسرعة
grow unboundedly	١١٤	ينمو بلا حدود
guarantee accuracy	١٠٣	يضمن الدقة
half-life	١٤	نصف عمر
Hamming’s method	١٣٦	طريقة هامنج
harmonic motion	١٦٠	حركة توافقية / تذبذبية

Heun’s method	٤٧	طريقة هوين
higher derivatives	١٠٢	مشتقات أعلى
hyperbola	١٢	قطع زائد
identical solution sets	١٠٢	مجموعات حلول متطابقة
implicit formula	٥	صيغة ضمنية
improved approximation	٥٩	تقريب مُحَسَّن
improved Euler’s method	٤٧	طريقة أويلر المُحَسَّنة
in parallel	١٦٤	على التوازي
inconsistent	١٢٩	غير متآلف
increase rapidly	١١٠	يزيد بسرعة
increasing error	١٣٨	خطأ متزايد
increment	١٦	الزيادة
increment function	٢٤	دالة الزيادة
independent variable	١	متغير مستقل
inequality	٣٣	متباينة
infected	٤٥	مصاب بعدوى
infinite series	٨	متسلسلة لا نهائية
inherent stability	١١١	الاستقرار الذاتي
inherently unstable equation	١١٠	معادلة غير مستقرة بذاتها
initial condition	٣	شرط ابتدائي
initial point	٩٥	نقطة ابتدائية
initial value problem (ivp)	٤	مسألة القيمة الابتدائية
integral approximation	٩٧	تقريب التكامل
integral correction	٤٨	تصحيح تكاملي
integration	٢	تكامل
integration formula	١٣١	صيغة التكامل
integration step	١٠٨	خطوة تكامل
interpolating polynomial	١٢٦	حدودية استكمال

interpolaton	١٣١	استكمال
interval	٥	فترة
iteration	٢١	تكرير / تكرار
iterative	٨٩	تكريري / تكراري
ivp (initial value problem)	٤	مسألة القيمة الابتدائية
Lagrange polynomial	١٣٠	حدودية لاجرانج
lemma	٣٣	مأخوذة
level	١٩٥	مستوى
linear combination	١٧٩	توافق خطي
linear method	١٢٧	طريقة خطية
linear shooting method	١٨٣	طريقة الإطلاق الخطي
linear system	١٧٤	نظام خطي
Lipschitz condition	٧	شرط ليبشتز
local discretization error	٢٥	خطأ الاقتطاع المحلي
local truncation error (lte)	٢٥	خطأ الاقتطاع المحلي
Maclaurin expansion	٧٧	مفكوك ماكلورين
mass	١٧١	كتلة
mathematical induction	٣٣	الاستنتاج الرياضي
mathematical model	٨	نموذج رياضي
mean value theorem	٧	نظرية القيمة المتوسطة
mesh of points	٢٤	شبكة نقاط
mesh points	١٠٣	نقاط الشبكة
midpoint formula	٧١	صيغة النقطة المتوسطة
midpoint of the interval	٩٨	نقطة منتصف الفترة
Milne predictor	١٣٥	صيغة ميلن للتقدير
Milne-Simpson method	١٣٤	طريقة ميلن – سمبسون
Milne-Simpson predictor-corrector multistep method	١٢٦	طريقة ميلن – سمبسون للتقدير والتصحيح متعددة الخطوات
model	٨	نموذج

modified Euler method	١٣٠	طريقة أويلر المعدلة
modified Euler-Cauchy method	٨٥	طريقة أويلر – كوشي المعدَّلة
multiplication	٦٧	الضرب
multistep method	١٠٣ ، ١٢٦	طريقة متعددة الخطوات
necessary condition	١٢٨	شرط ضروري
neglected term	٢٦	حد مهمل
nested multiplication	٦٧	الضرب المتداخل
Newton’s law of cooling / warming	٣	قانون نيوتن لانخفاض أو ارتفاع درجات حرارة الأجسام
nonlinear	٩	غير خطي
nonlinear bvp	١٨٨	مسألة قيمة حدية غير خطية
nonlinear DE	١٧١	معادلة تفاضلية غير خطية
nonlinear system	٩	نظام غير خطي
nonzero term	٧٣	حد غير صفري
normal distribution	١٢٣	التوزيع الاعتيادي
n^{th}-order DE	١	معادلة تفاضلية من الرتبة النونية
n^{th}-order RK method	٩٠	طريقة RK من الرتبة النونية
number of steps	٣٠	عدد الخطوات
numerical solution	١٥٦،١٦	الحل العددي
ODE (Ordinary Differential Equation)	١	معادلة تفاضلية عادية
one-step method	١١١	طريقة أحادية الخطوة
optimal step size	١٠٤	حجم الخطوة الأمثل
order	١	رتبة
ordinary differential equation (ODE)	١	معادلة تفاضلية عادية
oscillations	١٣٨	تذبذبات
overall FGE	٢٧	الخطأ الشامل النهائي الكلي
parabola	١٢	قطع مكافئ
parachute	٤٥	مظلة

parameter	٩٢	وسيط
partial instability	١١١	عدم الاستقرار الجزئي
particular solution	١٨٥	حل خاص
partition	١٨٩	تجزئ
path	٩	مسار
pendulum	١٧١	بندول
periodic function	١٧٠	دالة دورية
phenomenon	١١١	ظاهرة
plotting the path	٩	رسم المسار
polygonal path	١٦٦	مسار مضلعي
population	٤٣	تعداد
power series	٧٣	متسلسلة القوى
practical considerations	١٣٢	اعتبارات عملية
precision	٢٥	دقة
predator-prey problem	١٧١	مسألة المفترس والفريسة
predicted point	٤٩	نقطة التقدير الأولي
predicted slope	٩٧	الميل المتوقع
predicting equation	٨٩	معادلة تنبؤ / تقدير
prediction	٤٨	تنبؤ / تقدير أولي
predictor	١٢٧ ، ١٣٠	(معادلة) التقدير
predictor-corrector method	٨٤،١٢٥	طريقة التنبؤ / التقدير والتصحيح
predominant	٢٦	غالب
preliminary estimate	٨٣	تقدير مبدئي
procedure	٣٧	إجراء
project	١٩	يُسقِط
projectile	٥٨	قذيفة
propagate without bound	١١٠	ينتشر بلا حدود
propagation factor	١١٢	معامل الانتشار
propagation of errors	٣٠	انتشار الأخطاء

rabbits	١٧١	الأرانب
range	٧٣	مدى
reaction	٥٨	رد الفعل
recurrence relation	٥٦	علاقة ارتدادية
recursive	٦٤	ارتدادي
recursive formula	١٥٦	صيغة ارتدادية
reduction	١٧٨	اختزال
region	٥	منطقة
relationship	٢	علاقة
relative error	١١٣	الخطأ النسبي
resonance	١٧٠	رنين
Richardson deferred approach to the limit	٤٠	طريقة ريتشاردسون للاقتراب المؤجل من النهاية
Richardson extrapolation technique	١٠٨	طريقة ريتشاردسون للاستيفاء
Richardson improvement method	٥٩ ، ٧٥	طريقة ريتشاردسون للتحسين
Riemann sum	٤٤	مجموع ريمان
RKF45 (Runge-Kutta-Fehlberg method)	١٠٣	طريقة رونج – كوتا – فهلبرج (RKF45)
rounding error	٢٥	خطأ التقريب
round-off error	٢٥ ، ١١٠	خطأ التقريب
Runge	٩٢	" رونج "
Runge-Kutta methods	٥٥ ، ٨١	طرق رونج – كوتا
Runge-Kutta-Fehlberg method (RKF45)	١٠٣	طريقة رونج – كوتا – فهلبرج (RKF45)
saddle point	١٧٤	نقطة سرجية
scalar	١٠٤	ثابت قياسي
self-starting method	١٣٥	طريقة ذاتية البدء
seond-order procedure	٨٥	إجراء من الرتبة الثانية
seond-order RK method	٥٦	طريقة RK من الرتبة الثانية

separation of variables	٤	فصل المتغيرات
sequence	١٨ ، ٨٩	متتابعة / متتالية
sequence of approximations	٩٥	متتالية تقريبات
set	١١	مجموعة
shooting	١٨٣	إطلاق
significant digits	١٥	أرقام معنوية
simple root/zero	١٢٨	صفر / جذر بسيط
Simpson’s approximation	١٢٣	تقريب سمبسون
Simpson’s rule	٩٧	قاعدة سمبسون
simulate	١٠٢	يحاكي
simultaneous	١١	آني – في الوقت نفسه
simultaneous ODE’s	١١	معادلات تفاضلية عادية آنية
single-step method	٢٤	طريقة أحادية الخطوة
sizeable system	٩٢	نظام ذات حجم كبير
slope	٥	ميل
slope constraint	٥	شرط الميل
slope field	٥	حقل الميل
solution	٢	حل
solution curve	٢	منحنى الحل
solution set	١٦٦	مجموعة الحل
specified accuracy	١٠٣	دقة معينة
spiral point	١٧٣	نقطة حلزونية
spring	١٥٩	زنبرك
spring constant	١٥٩	ثابت زنبركي
stability	١٢٨،١١٠،١٠٧،٨١	الاستقرار
stable system	١١٣	نظام مستقر
standard method	٩	طريقة قياسية
standard RK method	٩٢	طريقة RK القياسية

standard tables	٧٤	الجداول القياسية
starting point	٦١	نقطة ابتدائية
starting value		قيمة ابتدائية
step	٥	خطوة
step by step integration procedure	١١٠	إجراء تكامل خطوة خطوة
step length	١١٨	طول الخطوة
step size	١٦	حجم الخطوة
step size control	١٠٧	التحكم في حجم الخطوة
stimulus	٥٨	الحث / الإثارة
stimulus-response	٥٩	الحث والاستجابة
string	١٧١	حبل
stringent conditions	١٣٩	شروط صارمة
strongly unstable method	١٢٨	طريقة غير مستقرة بدرجة عالية
structure	١٧٨	بِنْية
subinterval	٧	فترة جزئية
successive values	١٦	قيم متتابعة
sufficiently small	١٠٧	صغير صغرا كافيا
surrounding medium	٣	الوسط المحيط
swamp	١١٠	يكتسح / يفوق / يُغَرِّق
system of equations	٩٤	نظام معادلات
system of linear equations	١٩٠	نظام معادلات خطية
systems of differential equations	٩	نظم معادلات تفاضلية
table	٩	جدول
tangent line	٢٣	الخط المماس
Taylor method of order 4	٧٠	طريقة تايلور من الرتبة الرابعة
Taylor polynomial	٧٠	حدودية تايلور
Taylor series method	٦١	طريقة متسلسلة تايلور
Taylor’s theorem	١٧	نظرية تايلور

temporary storage	٩٢	حيز مؤقت
term	٣٢	حد
Tol (Tolerance)	١٠٥	التفاوت
total derivative	٦٤	المشتقة الكلية
total error	٣١	الخطأ الكلي
total truncation error	٣١	خطأ الاقتطاع الكلي
trajectories	١٧٢	مسارات / إزاحات
trapezoidal corrector formula	١٤٩	صيغة شبه المنحرف للتصحيح
tridiagonal form	١٩٠	صيغة قطرية ثلاثية
tridiagonal linear system	٢٠١	نظام خطي ثلاثي القطرية
troublesome solution	١٧٩	حل مثير للمشاكل
true	٣٣	صحيح
true solution	١٠٥	حل صحيح
truncated series	٣٢ ، ٧٣	متسلسلة مقتطعة / مقطوعة
truncation	٦٣	قطع
truncation error	٢٤،١٠٧	خطأ الاقتطاع
types of errors	٢٤	أنواع الخطأ
unbounded growth of error	١١٣	نمو الخطأ نموا غير محدود
undecayed material	١٤	مادة غير متحللة
unique solution	٧	حل وحيد
unit circle	١٢٨	دائرة الوحدة
unstable	١١٠	غير مستقر
unwanted solution	١١٠	حل غير مطلوب
upper bound	٣٧	الحد الأعلى
vanish	١١٠	يتلاشى
vertical	٧٧	رأسي
vertical axis	١٧١	المحور الرسي
Weber-Fechner law	٥٩	قانون وبر – فشنر

weighted average	٨٦	متوسط موزون
zeros of polynomial	١٢٨	أصفار الحدودية (جذورها)

بسم الله الرحمن الرحيم

مراجع عن نظرية المعلومات وصياغة الشفرات والرموز

References on Information Theory, Coding and Cryptography

فيما يلي قائمة بأسماء بعض الكتب والمراجع عن صياغة الشفرات ونظرية المعلومات وتطبيقاتها في المجالات المختلفة ، والقائمة مرتبة ترتيبا أبجديا بالنسبة لأسماء المؤلفين.

١) أبوبكر أحمد السيد
مقدمة في نظرية المعلومات وصياغة الشفرات
دار القلم للنشر والتوزيع – الكويت ، ١٩٩٣.
شارع السور – عمارة السور – الطابق الأول.
هاتف : ٢٤٥٧٤٠٧ – ٢٤٥٨٤٧٨

2) Richard E. Blahut,
Principles and Practice of Information Theory,
Addison-Wesley Publishing Company, 1987.
Q360.B57
ISBN 0-201-10709-0

3) Thomas M. Cover & Joy A. Thomas,
Elements of Information Theory
John Wiley & Sons, Inc., 1991.
Q360.C68
ISBN 0-471-06259-6

4) Richard W. Hamming,
Coding and Information Theory,
Prentice-Hall, Inc., 1980.
QA268.H35
ISBN 0-13-139139-9

5) Masud Mansuripur,
Introduction to Information Theory,
Prentice-Hall, Inc., 1987.
Q360.M3215
ISBN 0-13-484668-0

6) Steven Roman,
Coding and Information Theory,
Springer-Verlag, 1992.
QA268.R65
ISBN 0-387-97812-7

7) Douglas R. Stinson,
Cryptography.. Theory and Practice (Text),
CRC Press LLC, 1995.
QA268.S75
ISBN 0-8493-8521-0

8) Jan C. Van Der Lubbe,
Basic Methods of Cryptography,
Cambridge University Press, 1999.
QA76.9.A25L83
ISBN 0-521-55559-0

9) Dominic Welsh,
Codes and Cryptography,
Oxford University Press Inc., 1995.
ISBN 0-19-853287-3

محتويات الكتاب

الموضوع	رقم الصفحة
الفصل الأول: مقدمة عن المعادلات التفاضلية	١
تعريف المعادلة التفاضلية العادية	١
تعريف المعادلة التفاضلية ذات الرتبة النونية	١
حلول المعادلة التفاضلية	٢
مسألة القيمة الابتدائية	٤
التفسير الهندسي	٥
حقل الميل أو حقل الاتجاهات	٥
نظرية : وجود حل وحيد	٧
الحاجة إلى حل المعادلات التفاضلية عدديا	٨
هدف الحل العددي للمعادلة التفاضلية	٨
تمرينات رقم (١)	١٢
الفصل الثاني: طريقة " أُويْلَرْ "	١٥
الوصف الهندسي لطريقة أويلر	٢٣
العلاقة بين حجم الخطوة والخطأ	٢٤
أنواع الخطأ	٢٤
خطأ الاقتطاع	٢٤
خطأ الاقتطاع المحلي	٢٥
خطأ التقريب	٢٥
خطأ الاقتطاع الشامل	٢٥
نظرية: دقة طريقة أويلر	٢٦

الأخطاء وانتشارها في طريقة أويلر	٣٠
تراكم/انتشار أخطاء الاقتطاع المحلية في طريقة أويلر	٣٣
تقارب طريقة أويلر	٣٧
خوارزمية طريقة أويلر	٣٩
تمرينات رقم (٢)	٤٠
الفصل الثالث: طريقة هُوِين " أو طريقة أُويْلَرْ المحسَّنة "	٤٧
العلاقة بين حجم الخطوة والخطأ	٤٩
نظرية: دقة طريقة هوين	٤٩
خوارزمية طريقة هوين	٥٤
تمرينات رقم (٣)	٥٥
الفصل الرابع: طريقة متسلسلة تايلور	٦١
نظرية تايلور	٦٤
نظرية: دقة طريقة تايلور من الرتبة N	٦٥
خوارزمية طريقة تايلور من الرتبة الرابعة	٧٠
تمرينات رقم (٤)	٧١
الفصل الخامس: طرق رُونج – كوتَّا	٨١
طريقة رونج – كوتا من الرتبة الثانية	٨٢
طريقة رونج – كوتا العامة من الرتبة النونية	٩٠
طريقة رونج – كوتا من الرتبة الثالثة RK3	٩١
طريقة رونج – كوتا من الرتبة الرابعة	٩٢
طريقة RK من الرتبة الرابعة باستخدام ثوابت رونج	٩٢
طريقة RK من الرتبة الرابعة باستخدام ثوابت جِل	٩٣

مناقشة طريقة رونج – كوتا القياسية	٩٧
العلاقة بين حجم الخطوة والخطأ	٩٩
نظرية: دقة طريقة رونج – كوتا	٩٩
طريقة رونج – كوتا – فهلبرج RKF45	١٠٣
خطأ الاقتطاع والاستقرار والتحكم في حجم الخطوة في خوارزميات RK	١٠٧
التحكم في حجم الخطوة	١٠٧
تقدير الخطأ في طريقة RK	١٠٨
الاستقرار	١١٠
عدم الاستقرار الجزئي	١١١
خوارزمية طريقة رونج – كوتا من الرتبة الرابعة RK4	١١٥
خوارزمية طريقة رونج – كوتا – فهلبرج RKF45	١١٦
تمرينات رقم (٥)	١١٨
الفصل السادس: طرق التقدير والتصحيح	١٢٥
الطرق متعددة الخطوات	١٢٦
تعريف التآلف	١٢٩
طريقة آدمز – باشفورث – مولتن	١٣٠
تقدير الخطأ وتصحيحه	١٣١
اعتبارات عملية	١٣٢
طريقة ميلن – سمبسون	١٣٤
تقدير الخطأ وتصحيحه	١٣٥
طريقة هامنج	١٣٦
طرق التقدير والتصحيح وشرط الاستقرار	١٣٨

خوارزمية طريقة آدمز – باشفورث – مولتن	١٤٢
خوارزمية طريقة ميلن – سمبسون	١٤٣
خوارزمية طريقة هامنج	١٤٤
تمرينات رقم (٦)	١٤٦
الفصل السابع: نظم المعادلات التفاضلية	١٥٥
الحلول العددية	١٥٦
المعادلات التفاضلية ذات الرتب العالية	١٥٨
تمرينات رقم (٧)	١٦٥
الفصل الثامن: مسائل القيمة الحدية	١٧٧
نظرية: مسألة القيمة الحدية	١٧٧
مسألة القيمة الحدية الخطية	١٧٨
الاختزال إلى مسألتي قيمة ابتدائية	١٧٨
طريقة الإطلاق الخطي	١٧٨
خوارزمية طريقة الإطلاق الخطي	١٨٣
تمرينات رقم (٨)	١٨٥
الفصل التاسع: طريقة الفرق المحدود	١٨٩
خوارزمية طريقة الفرق المحدود	١٩٧
تمرينات رقم (٩)	١٩٩
تمرينات عامة	٢٠٣
أجوبة تمرينات الكتاب	٢١٣

أجوبة تمرينات رقم (١)	٢١٣
أجوبة تمرينات رقم (٢)	٢١٤
أجوبة تمرينات رقم (٣)	٢١٨
أجوبة تمرينات رقم (٤)	٢٢٤
أجوبة تمرينات رقم (٥)	٢٣٠
أجوبة تمرينات رقم (٦)	٢٣٦
أجوبة تمرينات رقم (٧)	٢٤٤
أجوبة تمرينات رقم (٨)	٢٤٦
أجوبة تمرينات رقم (٩)	٢٤٧
أجوبة التمرينات العامة	٢٤٨
أسماء بعض الكتب والمراجع	٢٦١
دليل المصطلحات العربية والإنجليزية	٢٧٧
محتويات الكتاب	٢٩٣
كتب للمؤلف .. من منشورات دار القلم .. الكويت	٢٩٨

كتب للمؤلف

من منشورات دار القلم .. الكويت

١- برمجة الحاسب بلغة الفورتران ، ط ٤ ، ١٩٩٢.
٢- مقدمة في نظرية المعلومات ، ط ٢ ، ١٩٩٣.
٣- الشبكات الرقمية ، ١٩٨٦.
٤- التحليل العددي ، ١٩٨٨.
٥- الجبر الخطي ، ط ٢ ، ١٩٩٥.
٦- برمجة الحاسب بلغة الباسكال ، ط٢ ، ١٩٩٩.
٧- البرمجة المتقدمة بلغة الباسكال ، مع د. حمزة رشوان ، ١٩٩٤.
٨- الدوائر المتكاملة الرقمية (ترجمة) ، ١٩٩٣.
٩- الخوارزميات والبرمجة بلغة الباسكال ، ١٩٩٧.
١٠- بنى المعطيات ، مع د. حمزة رشوان ، ١٩٩٨.
١١- الحلول العددية للمعادلات التفاضلية العادية ، ٢٠٠٠.
١٢- الحول العددية للمعادلات التفاضلية الجزئية ، تحت الطبع.
١٣- تصميم وتحليل الخوارزميات ، مع د. حمزة رشوان ، تحت الطبع.

﴿ سُبْحَانَكَ لَا عِلْمَ لَنَا إِلَّا مَا عَلَّمْتَنَا إِنَّكَ أَنْتَ الْعَلِيمُ الْحَكِيمُ ﴾

(سورة البقرة : ٣٢)